

Exercice 1 – Une courbe sous l'axe des abscisses

4 points

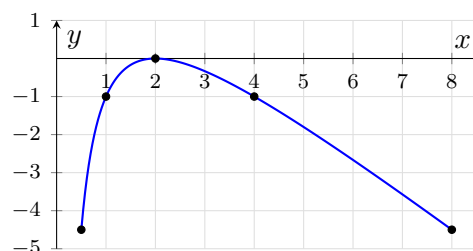
1) $f'(x) = -1 - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{4 - x^2}{x^2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{x^2}$. (1 pt)

2) Sur $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$, $2 + x > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $2 - x$, positif avant 2, négatif après. (1 pt)

x	$\frac{1}{2}$	2	8
$f'(x)$	+	0	-
f	-4,5	0	-4,5

3) Valeurs : $f(0,5) = 4 - 0,5 - 8 = -4,5$; $f(1) = 4 - 1 - 4 = -1$; $f(2) = 4 - 2 - 2 = 0$; $f(4) = 4 - 4 - 1 = -1$; $f(8) = 4 - 8 - 0,5 = -4,5$. (1 pt)

x	0,5	1	2	4	8
$f(x)$	-4,5	-1	0	-1	-4,5



4) D'après le tableau de variations, le maximum de f sur $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$ est $f(2) = 0$: pour tout x de cet intervalle, $f(x) \leq 0$, c'est-à-dire $4 - x - \frac{4}{x} \leq 0$, soit (1 pt)

$$x + \frac{4}{x} \geq 4.$$

La courbe de f est sous l'axe des abscisses et le touche seulement au point d'abscisse 2.

Exercice 2 – La sérigraphie d'une affiche (deux documents)

5 points

1) Pour n affiches, le coût total est $600 + 3n$ euros; le prix de revient d'une affiche est donc (1 pt)

$$u(n) = \frac{600 + 3n}{n} = 3 + \frac{600}{n}, \quad u(100) = 3 + 6 = 9 \text{ euros}, \quad u(200) = 3 + 3 = 6 \text{ euros}.$$

2) En passant de 100 à 200 affiches, le prix d'une affiche passe de 9 à 6 euros, et non à 4,50 euros : le premier slogan est faux. (1,5 pt)

$$\text{Pour tout } n > 0 : u(2n) - 3 = \frac{600}{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{600}{n} = \frac{u(n) - 3}{2}.$$

Doubler le tirage divise par deux seulement la part des frais de préparation (600 euros) supportée par chaque affiche; les 3 euros de papier et d'encre restent dus pour chaque affiche.

3) $u'(n) = 600 \times \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \boxed{-\frac{600}{n^2}} < 0 : u$ est **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$. (1,5 pt)

Mais, pour tout $n > 0$, $\frac{600}{n} > 0$, donc $u(n) > 3$: le prix d'une affiche reste toujours supérieur à 3 euros (il s'en rapproche lorsque n devient très grand ; $u(1\,000) = 3,60$ euros).

Le second slogan est faux : quel que soit le tirage, une affiche coûte plus de 3 euros.

4) Coût total : $600 + 3n \leq 2\,400 \iff 3n \leq 1\,800 \iff n \leq 600$: au plus $\boxed{600}$ affiches. (1 pt)
Sur le graphique, la courbe passe par le point d'abscisse 600 et d'ordonnée 4 : une affiche revient à environ 4 euros. Calcul : $u(600) = 3 + 1 = \boxed{4}$ euros.

Exercice 3 – La dérivée de la fonction inverse (copie d'un élève)

3 points

1) On a $1 < 2$ et $\frac{1}{1} = 1 > \frac{1}{2}$: l'image diminue quand la variable augmente. La fonction inverse ne peut donc pas être croissante sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

2) L'erreur est à la ligne 2, dans l'ordre de la soustraction au numérateur. En réduisant au même dénominateur $a(a+h)$:

$$\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)}.$$

Inès a écrit $(a+h) - a$ au lieu de $a - (a+h)$: elle a inversé les deux termes, ce qui change le signe du résultat.

3) Lignes corrigées : (1,5 pt)

Ligne 2 : $\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}.$

Ligne 3 : le taux de variation vaut $\frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$; quand h devient très proche de 0, il devient très proche de $-\frac{1}{a^2}$.

Ligne 4 : le nombre dérivé en a est $\boxed{-\frac{1}{a^2}}$, strictement négatif : la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4 – Encadrer une affiche au meilleur prix

4 points

Modélisation. Notons x la hauteur de l'affiche, en mètres, avec $x \in [0,25; 2]$. Son aire vaut $0,5 \text{ m}^2$, donc sa largeur est $\frac{0,5}{x}$ mètre.

Coût des deux montants : $2 \times 30 \times x = 60x$ euros ; coût des deux traverses : $2 \times 15 \times \frac{0,5}{x} = \frac{15}{x}$ euros.

Le coût de la baguette est

$$c(x) = 60x + \frac{15}{x}, \quad x \in [0,25; 2].$$

Étude. $c'(x) = 60 - \frac{15}{x^2} = \frac{60x^2 - 15}{x^2} = \frac{15(4x^2 - 1)}{x^2} = \frac{15(2x-1)(2x+1)}{x^2}$, du signe de $2x-1$ sur $[0,25; 2]$.

x	0,25	0,5	2
$c'(x)$	-	0	+
c	75	60	127,5

$(c(0,25) = 15 + 60 = 75; c(0,5) = 30 + 30 = 60; c(2) = 120 + 7,5 = 127,5.)$

Conclusion. Le coût est minimal pour une hauteur de 0,5 m, donc une largeur de $\frac{0,5}{0,5} = 1$ m : il faut choisir le format « paysage » de 1 m de large sur 0,5 m de haut, pour un coût de baguette de **60 euros**.
Format carré : côté x tel que $x^2 = 0,5$, soit $x \approx 0,707$ m, et $c(0,707) \approx 63,64$ euros, plus que 60 euros.
L'encadreur a tort : le carré minimiserait la longueur totale de baguette, mais ici les montants coûtent deux fois plus cher que les traverses ; il vaut mieux des montants courts et des traverses longues.

Barème indicatif : modélisation du coût (1,5 pt) ; dérivée et variations (1,5 pt) ; conclusion et comparaison avec le carré (1 pt).

Exercice 5 – La charge virale d'un patient (transversal : logarithme) 4 points

1) $\log(V(0)) = \log(200\,000) = \log(2) + \log(10^5) = 5 + \log(2) \approx \boxed{5,30}$. (0,5 pt)

2) Pour tout $t \geq 0$, avec $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ et $\log(a^t) = t \log(a)$: (1 pt)

$$\log(V(t)) = \log(200\,000) + \log(0,6^t) = \log(200\,000) + t \log(0,6).$$

Chaque semaine, $\log(V(t))$ diminue de $-\log(0,6) \approx \boxed{0,22}$: la charge virale baisse d'environ 0,22 log par semaine.

3) Une baisse de 2 log correspond à une division par $10^2 = 100$: on résout $0,6^t = 0,01$, soit (1 pt)

$$t \log(0,6) = \log(0,01) = -2 \iff t = \frac{-2}{\log(0,6)} \approx \boxed{9,0 \text{ semaines}}.$$

4) On résout $200\,000 \times 0,6^t < 50$, soit $0,6^t < 0,000\,25$: (1,5 pt)

$$t \log(0,6) < \log(0,000\,25) \iff t > \frac{\log(0,000\,25)}{\log(0,6)} \approx 16,24$$

le sens de l'inégalité change car $\log(0,6) < 0$. Vérification : $V(16) \approx 56,4$ et $V(17) \approx 33,9$ copies/mL.

Selon ce modèle, la charge virale du patient devient indétectable à partir de la 17^e semaine de traitement.