

Calculatrice autorisée (mode examen)

Le sujet comporte cinq exercices indépendants. L'exercice 5 porte sur le logarithme décimal, noté $\log$.

Exercice 1 – Une courbe sous l'axe des abscisses

4 points

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$ par $f(x) = 4 - x - \frac{4}{x}$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x^2}$.
- 2) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[\frac{1}{2}; 8\right]$.
- 3) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, puis tracer l'allure de la courbe de f dans un repère.

x	0,5	1	2	4	8
$f(x)$					

- 4) En déduire que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 8\right]$, $x + \frac{4}{x} \geq 4$.

Exercice 2 – La sérigraphie d'une affiche (deux documents)

5 points

Un collectif de graphistes fait imprimer en sérigraphie l'affiche d'un festival.

Document 1 – Tarif de l'atelier de sérigraphie

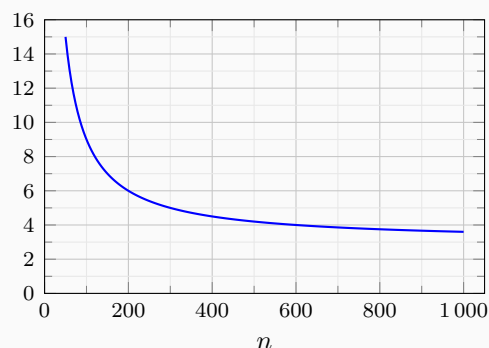
Préparation des écrans et calage de la presse (deux couleurs) : 600 euros, quel que soit le tirage.
Papier et encres : 3 euros par affiche imprimée.

Document 2 – Extrait de la plaquette publicitaire de l'atelier

« Doublez votre tirage : le prix de chaque affiche est divisé par deux ! »

« Au-delà de 1 000 exemplaires, votre affiche vous revient à moins de 3 euros ! »

Ci-contre : prix de revient d'une affiche, en euros, selon le nombre n d'affiches imprimées.



- 1) À l'aide du document 1, montrer que le prix de revient d'une affiche, en euros, pour n affiches imprimées, est $u(n) = 3 + \frac{600}{n}$. Calculer $u(100)$ et $u(200)$.

- 2) Le premier slogan du document 2 est-il exact ? Montrer que, pour tout $n > 0$,

$$u(2n) - 3 = \frac{u(n) - 3}{2},$$

et expliquer ce que le doublement du tirage divise réellement par deux.

- 3) Calculer $u'(n)$, puis en déduire le sens de variation de u . Le second slogan est-il exact ? Justifier.
4) Le collectif dispose d'un budget de 2 400 euros. Combien d'affiches peut-il faire imprimer au plus ? Lire sur le graphique du document 2 le prix de revient d'une affiche correspondant, puis le confirmer par le calcul.

Exercice 3 – La dérivée de la fonction inverse (copie d'un élève)

3 points

Pour calculer le nombre dérivé de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ en un réel $a > 0$, Inès a rédigé ceci (h est un réel non nul tel que $a + h > 0$).

Ligne 1 : le taux de variation entre a et $a + h$ est $\left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}\right) \div h$.

Ligne 2 : $\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{(a+h) - a}{a(a+h)} = \frac{h}{a(a+h)}$.

Ligne 3 : donc le taux de variation vaut $\frac{1}{a(a+h)}$; quand h devient très proche de 0, il devient très proche de $\frac{1}{a^2}$.

Ligne 4 : le nombre dérivé en a est $\frac{1}{a^2}$, qui est positif : la fonction inverse est croissante sur $]0; +\infty[$.

- 1) Sans aucun calcul de dérivée, montrer à l'aide de deux valeurs bien choisies que la conclusion de la ligne 4 est fausse.
2) Repérer l'erreur commise par Inès et l'expliquer.
3) Rédiger les lignes 2, 3 et 4 corrigées.

Exercice 4 – Encadrer une affiche au meilleur prix

4 points

Question ouverte. Aucune sous-question n'est posée : la démarche, les calculs et la rédaction sont évalués. Toute piste, même non aboutie, sera prise en compte.

Une graphiste fait encadrer une affiche rectangulaire d'aire $0,5 \text{ m}^2$, dont la hauteur peut aller de $0,25 \text{ m}$ à 2 m selon le format choisi. Les deux montants verticaux du cadre sont taillés dans une baguette de chêne à 30 euros le mètre, les deux traverses horizontales dans une baguette de pin à 15 euros le mètre. On néglige la largeur de la baguette.

Quelles dimensions donner à l'affiche pour que le coût de la baguette soit le plus faible possible ? L'encadreur conseille un format carré : a-t-il raison ?

Exercice 5 – La charge virale d'un patient (transversal : logarithme) 4 points

Chez un patient atteint d'une infection virale chronique, la charge virale (nombre de copies du virus par millilitre de sang) est de 200 000 copies/mL au début d'un traitement. Le médecin modélise la charge virale t semaines après le début du traitement par $V(t) = 200\,000 \times 0,6^t$, pour $t \geq 0$.

Les médecins décrivent souvent une charge virale par son logarithme décimal ; une « baisse de 1 log » signifie que la charge virale est divisée par 10.

- 1) Calculer $\log(V(0))$, *arrondi à 0,01*.
- 2) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\log(V(t)) = \log(200\,000) + t \log(0,6)$. De combien de « log » la charge virale baisse-t-elle chaque semaine ? *Arrondir à 0,01*.
- 3) Au bout de combien de semaines la charge virale aura-t-elle baissé de 2 log ? *Arrondir au dixième de semaine*.
- 4) La charge virale est dite indétectable lorsqu'elle est inférieure à 50 copies/mL. À partir de combien de semaines entières de traitement la charge virale du patient sera-t-elle indétectable selon ce modèle ? Répondre par une phrase.