

Exercice 1 – Inverses et dérivées express (réponses courtes)

3 points

Chaque bonne réponse vaut 0,5 point; aucune justification n'est exigée.

N°	Réponse	Éléments de méthode
1	$6x^2 - 10x$	$(x^3)' = 3x^2$ et $(x^2)' = 2x : 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x$.
2	$m = I \times t^2$	On multiplie les deux membres par $t^2 \neq 0$.
3	$[-4; 2]$	Parabole « tournée vers le haut » (coefficient 3 > 0) qui coupe l'axe en -4 et 2 : elle est sous l'axe entre les racines, racines comprises.
4	$5\,000$	$\frac{1}{2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{2} \times 10^4 = 0,5 \times 10^4$.
5	$5 + \frac{3}{x^2}$	$\left(-\frac{3}{x}\right)' = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}$.
6	$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$	La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$: elle renverse l'ordre.

Exercice 2 – Décroissance, taux et courbe (vrai ou faux)

5 points

1) FAUX.

(1,25 pt)

Contre-exemple : $-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} = -1 < \frac{1}{1} = 1$; l'ordre est conservé, ce qui est impossible pour une fonction décroissante sur un ensemble contenant -1 et 1 .

La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$, mais pas sur leur réunion.

2) VRAI.

(1,25 pt)

$$\frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \frac{-h}{(1+h)h} = -\frac{1}{1+h} \quad (h \neq 0).$$

(Lorsque h devient très proche de 0, ce taux se rapproche de -1 : on retrouve le nombre dérivé $-\frac{1}{1^2} = -1$.)

3) VRAI.

(1,25 pt)

$2 + \frac{1}{x} = 2 \iff \frac{1}{x} = 0$, équation qui n'a pas de solution (le produit $x \times 0$ ne peut pas valoir 1) : la courbe ne coupe pas la droite.

Pour $x > 0$, l'écart $\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2 = \frac{1}{x}$ est positif et devient aussi petit que l'on veut lorsque x devient très grand (par exemple $\frac{1}{x} < 10^{-6}$ dès que $x > 10^6$) : la courbe se rapproche de la droite en restant au-dessus.

4) FAUX.

(1,25 pt)

$$k'(x) = 3 - \frac{12}{x^2} = \frac{3(x^2 - 4)}{x^2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{x^2} : k'(x) > 0 \text{ pour } x > 2, \text{ donc } k \text{ est croissante sur } [2; 3].$$

Contre-exemple chiffré : $k(2) = 6 + 6 = 12$ et $k(3) = 9 + 4 = 13 > 12$. La fonction k est décroissante seulement sur $]0; 2]$.

Exercice 3 – Une étude de fonction sans calculatrice

4 points

1) $f'(x) = 2x - 2 + 8 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^3 - 2x^2 - 8}{x^2}$. (1,5 pt)

Par ailleurs, $2(x-2)(x^2+x+2) = 2(x^3+x^2+2x-2x^2-2x-4) = 2(x^3-x^2-4) = 2x^3-2x^2-8$.

Donc $f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}$.

2) Pour $x \in \left[\frac{1}{2}; 4\right]$, on a $x > 0$, donc $x^2 > 0$; x^2+x+2 est une somme de trois nombres strictement positifs : $x^2+x+2 > 0$. (2,5 pts)

Sur $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$, $2 > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x-2$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 1 + 16 = \frac{61}{4}; \quad f(2) = 4 - 4 + 4 = 4; \quad f(4) = 16 - 8 + 2 = 10.$$

x	$\frac{1}{2}$	2	4
$f'(x)$	-	0	+
f	$\frac{61}{4}$	4	10

Exercice 4 – Deux auberges pour un repas de séminaire

8 points

1) Pour 50 convives : (1 pt)

- Lac : $1\,200 + 25 \times 50 = 2\,450$ euros, soit $\frac{2\,450}{50} = 49$ euros par convive ;
- Colline : $500 + 32 \times 50 = 2\,100$ euros, soit $\frac{2\,100}{50} = 42$ euros par convive .

2) Pour n convives, le prix total au Lac est $1\,200 + 25n$; divisé par $n \neq 0$: (1 pt)

$$p_L(n) = \frac{1\,200 + 25n}{n} = \frac{1\,200}{n} + 25 = 25 + \frac{1\,200}{n}.$$

$$\text{De même, } p_C(n) = \frac{500 + 32n}{n} = 32 + \frac{500}{n}.$$

3) $p'_L(n) = 1\,200 \times \left(-\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1\,200}{n^2} < 0$ sur $[20; 200]$: p_L est décroissante. (1,5 pt)

Plus il y a de convives, moins chaque repas revient cher au Lac : les 1 200 euros de location et de

service sont partagés entre un plus grand nombre de personnes.

- 4) Lorsque n devient très grand, $\frac{1\,200}{n}$ devient très proche de 0, donc $p_L(n)$ se rapproche de 25 euros. (1 pt)

Il ne l'atteint jamais : $\frac{1\,200}{n} > 0$ pour tout $n > 0$, donc $p_L(n) > 25$.

Le prix par convive ne peut pas descendre sous 25 euros, le prix du repas lui-même : seule la part de la location diminue.

- 5) Pour $n \in [20 ; 200]$ ($n > 0$) : (1,5 pt)

$$25 + \frac{1\,200}{n} \leq 32 + \frac{500}{n} \iff \frac{700}{n} \leq 7 \iff 700 \leq 7n \iff n \geq 100$$

(on a multiplié par $n > 0$, ce qui conserve le sens de l'inégalité). Solution : $n \in [100 ; 200]$.

L'entreprise a intérêt à choisir l'Auberge de la Colline pour moins de 100 convives, l'Auberge du Lac à partir de 100 convives (pour exactement 100 convives, les deux reviennent à 37 euros par personne).

- 6) Pour $n = 20$: $p_L(20) = 25 + 60 = 85$ et $p_C(20) = 32 + 25 = 57$. La courbe qui part du point $(20 ; 85)$, la plus haute à gauche, est $\mathcal{C}_1$: $\mathcal{C}_1$ représente p_L , $\mathcal{C}_2$ représente p_C . (1 pt)
Les deux courbes se coupent au point d'abscisse 100 (ordonnée 37) ; à droite de ce point, $\mathcal{C}_1$ est sous $\mathcal{C}_2$: on retrouve $p_L(n) \leq p_C(n)$ pour $n \geq 100$.

- 7) Les fonctions p_L et p_C sont décroissantes ; on résout chaque inéquation en multipliant par $n > 0$: (1 pt)

- $25 + \frac{1\,200}{n} \leq 40 \iff \frac{1\,200}{n} \leq 15 \iff n \geq 80$: au moins 80 convives au Lac ;
- $32 + \frac{500}{n} \leq 40 \iff \frac{500}{n} \leq 8 \iff n \geq 62,5$: n étant entier, au moins 63 convives à la Colline.