

Calculatrice interdite

Tous les résultats demandés sont des valeurs exactes.

Exercice 1 – Inverses et dérivées express (réponses courtes)

3 points

Aucune justification n'est demandée. Écrire le résultat dans la colonne « Réponse » (ou sur la copie, avec le numéro de la question). Chaque réponse courte vaut 0,5 point.

N°	Énoncé	Réponse
1	Donner la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$.	
2	L'indice de masse corporelle vérifie $I = \frac{m}{t^2}$ (m masse en kg, t taille en m). Exprimer m en fonction de I et de t .	
3	Donner, sous la forme d'un intervalle, l'ensemble des réels x tels que $3(x + 4)(x - 2) \leq 0$.	
4	Donner la valeur de $\frac{1}{x}$ pour $x = 2 \times 10^{-4}$.	
5	Donner la dérivée de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 5x - \frac{3}{x}$.	
6	On sait que $2 \leq x \leq 5$. Donner le meilleur encadrement possible de $\frac{1}{x}$.	

Exercice 2 – Décroissance, taux et courbe (vrai ou faux)

5 points

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Une réponse sans justification (calcul, propriété, contre-exemple) ne rapporte aucun point.

- 1) La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
- 2) Pour tout réel h non nul et strictement supérieur à -1 , le taux de variation de la fonction inverse entre 1 et $1 + h$ est égal à $-\frac{1}{1+h}$.
- 3) La courbe de la fonction $x \mapsto 2 + \frac{1}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$, ne coupe pas la droite d'équation $y = 2$, mais s'en rapproche autant qu'on veut lorsque x devient très grand.
- 4) La fonction k définie sur $]0; +\infty[$ par $k(x) = 3x + \frac{12}{x}$ est décroissante sur $]0; 3]$.

Exercice 3 – Une étude de fonction sans calculatrice

4 points

On considère la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ par $f(x) = x^2 - 2x + \frac{8}{x}$.

- 1) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que $f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2+x+2)}{x^2}$.
- 2) Justifier que, pour tout x de $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$, $x^2 + x + 2 > 0$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ avec les valeurs exactes aux bornes et au point où la dérivée s'annule.

Exercice 4 – Deux auberges pour un repas de séminaire

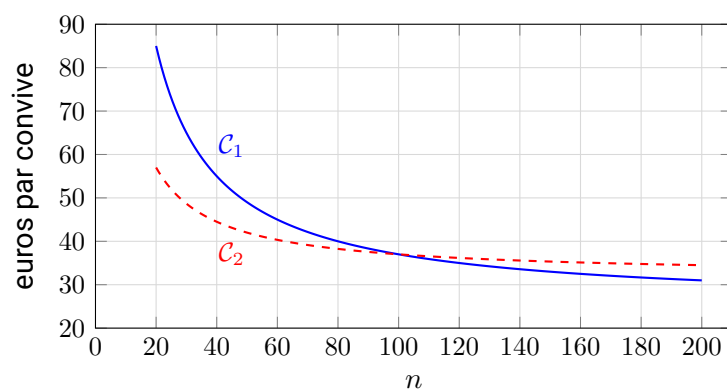
8 points

Une entreprise organise un repas de séminaire pour n convives, avec n compris entre 20 et 200. Elle compare deux auberges.

- **Auberge du Lac** : location de la salle et service 1 200 euros, puis 25 euros par convive.
- **Auberge de la Colline** : location de la salle et service 500 euros, puis 32 euros par convive.

On note $p_L(n)$ et $p_C(n)$ les prix de revient d'un repas, en euros par convive, dans chacune des auberges.

- 1) Calculer le prix total payé à chaque auberge pour 50 convives, puis le prix par convive.
- 2) Justifier que, pour $n \in [20; 200]$, $p_L(n) = 25 + \frac{1\,200}{n}$ et $p_C(n) = 32 + \frac{500}{n}$.
- 3) Calculer $p'_L(n)$ et en déduire le sens de variation de p_L sur $[20; 200]$. Expliquer ce résultat par une phrase dans le contexte.
- 4) Lorsque le nombre de convives devient très grand, de quelle valeur $p_L(n)$ se rapproche-t-il ? Ce prix par convive peut-il descendre jusqu'à cette valeur ? Justifier.
- 5) Résoudre l'inéquation $p_L(n) \leq p_C(n)$ sur $[20; 200]$, puis indiquer à l'entreprise quelle auberge choisir selon le nombre de convives.
- 6) Les courbes de p_L et p_C sont tracées ci-dessous. Associer chaque courbe à son auberge en justifiant, et retrouver graphiquement le résultat de la question 5.



- 7) Le budget de l'entreprise est de 40 euros par convive au plus. Pour chaque auberge, déterminer le nombre minimal de convives qui permet de respecter ce budget.