

Exercice 1 – Le café d'une petite torréfaction

10 points

Partie A – Le coût moyen d'un kilogramme

1) $C(50) = 0,02 \times 2\,500 + 6 \times 50 + 450 = 50 + 300 + 450 = \boxed{800 \text{ euros}}$. (1 pt)

$$C_M(50) = \frac{800}{50} = \boxed{16 \text{ euros par kilogramme}}.$$

2) Pour $q \in [20; 250]$, $q \neq 0$ et on divise chaque terme par q : (1 pt)

$$C_M(q) = \frac{0,02 q^2}{q} + \frac{6 q}{q} + \frac{450}{q} = \boxed{0,02 q + 6 + \frac{450}{q}}.$$

3) C_M est une somme d'une fonction affine et de 450 fois la fonction inverse, dont la dérivée est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$: (2 pts)

$$C'_M(q) = 0,02 - \frac{450}{q^2} = \frac{0,02 q^2 - 450}{q^2} = \frac{0,02 (q^2 - 22\,500)}{q^2} = \boxed{\frac{0,02 (q - 150)(q + 150)}{q^2}}$$

car $450 = 0,02 \times 22\,500$ et $q^2 - 22\,500 = q^2 - 150^2 = (q - 150)(q + 150)$.

4) Sur $[20; 250]$: $0,02 > 0$, $q + 150 > 0$ et $q^2 > 0$, donc $C'_M(q)$ a le signe de $q - 150$. (2,5 pts)

$C_M(20) = 0,4 + 6 + 22,5 = 28,9$; $C_M(150) = 3 + 6 + 3 = 12$; $C_M(250) = 5 + 6 + 1,8 = 12,8$.

q	20	150	250
$C'_M(q)$	–	0	+
C_M	28,9	12	12,8

Partie B – Vendre le café

5) D'après la question 1, $C_M(50) = 16$. (2 pts)

- Sur $[20; 150]$, C_M est décroissante : pour $20 \leq q < 50$, $C_M(q) > C_M(50) = 16$, et pour $50 \leq q \leq 150$, $C_M(q) \leq 16$.
- Sur $[150; 250]$, C_M est croissante et son maximum est $C_M(250) = 12,8 < 16$: $C_M(q) \leq 16$.

Le coût moyen ne dépasse pas le prix de vente pour $q \in [50; 250]$.

6) Le gérant doit produire au moins 50 kilogrammes par mois pour ne pas vendre son café à perte; c'est vers 150 kilogrammes par mois que le kilogramme lui coûte le moins cher, 12 euros, soit une marge de 4 euros par kilogramme vendu. (1,5 pt)

Au-delà de 150 kg, les heures supplémentaires font remonter le coût moyen : produire plus n'est pas toujours plus rentable par kilogramme.

Exercice 2 – Inverses et dérivées (QCM justifié)

6 points

Chaque question vaut 1,5 point (lettre exacte et justification).

1) **Réponse B.** La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$: si $0 < x < 10^{-3}$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{10^{-3}} = 10^3 = 1\,000$.
(L'inverse d'un nombre positif très petit est très grand ; A et C sont donc fausses, et D aussi car $x > 0$ donne $\frac{1}{x} > 0$.)

2) **Réponse D.** La dérivée de x^3 est $3x^2$, celle de $-4x$ est -4 et celle de $\frac{2}{x} = 2 \times \frac{1}{x}$ est $2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$.
Donc $f'(x) = 3x^2 - 4 - \frac{2}{x^2}$.

3) **Réponse A.** Avec $f(x) = \frac{1}{x}$: $f(2) = \frac{1}{2}$ et $f'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$. La tangente a pour équation

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1.$$

4) **Réponse C.** $g'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2} = \frac{2(x - 2)(x + 2)}{x^2}$, du signe de $x - 2$ sur $]0; +\infty[$.
 g est décroissante sur $]0; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$: son minimum est $g(2) = 4 + 4 = 8$.

Clé : B, D, A, C.

Exercice 3 – Un minimum à localiser

4 points

1) $h'(x) = 2x + 54 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2x^3 - 54}{x^2} = \boxed{\frac{2(x^3 - 27)}{x^2}}$. (1,5 pt)

2) On a $27 = 3^3$. La fonction cube étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$: (2,5 pts)

- si $x < 3$, alors $x^3 < 3^3 = 27$, donc $x^3 - 27 < 0$;
- si $x > 3$, alors $x^3 > 27$, donc $x^3 - 27 > 0$; et $x^3 - 27 = 0$ pour $x = 3$.

Donc $x^3 - 27$ a le signe de $x - 3$. Sur $[1; 6]$, $2 > 0$ et $x^2 > 0$: $h'(x)$ a le signe de $x - 3$.

$$h(1) = 1 + 54 = 55; \quad h(3) = 9 + 18 = 27; \quad h(6) = 36 + 9 = 45.$$

x	1	3	6
$h'(x)$	−	0	+
h	55	27	45

La valeur minimale de h sur $[1; 6]$ est $\boxed{h(3) = 27}$.