

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 – Le café d’une petite torréfaction

10 points

Une torréfaction artisanale grille et ensache du café, entre 20 et 250 kilogrammes par mois. Pour q kilogrammes produits dans le mois, le coût total de production, en euros, est

$$C(q) = 0,02 q^2 + 6 q + 450, \quad q \in [20 ; 250].$$

Les 450 euros correspondent aux frais fixes du mois (loyer, entretien du torréfacteur), $6 q$ à l’achat du café vert, et $0,02 q^2$ aux heures supplémentaires et à l’énergie, qui augmentent vite avec la production.

Partie A – Le coût moyen d’un kilogramme

Le coût moyen d’un kilogramme est $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- 1) Calculer $C(50)$ et $C_M(50)$.
- 2) Montrer que, pour tout $q \in [20 ; 250]$, $C_M(q) = 0,02 q + 6 + \frac{450}{q}$.
- 3) Calculer $C'_M(q)$, puis montrer que $C'_M(q) = \frac{0,02 (q - 150)(q + 150)}{q^2}$.
- 4) Étudier le signe de $C'_M(q)$ sur $[20 ; 250]$ et dresser le tableau de variations de C_M , avec les valeurs aux bornes et au point où la dérivée s’annule.

Partie B – Vendre le café

La torréfaction vend son café 16 euros le kilogramme.

- 5) À l’aide du tableau de variations et de la question 1, déterminer les productions q pour lesquelles le coût moyen ne dépasse pas le prix de vente.
- 6) Rédiger une phrase de conseil au gérant : quelle production mensuelle minimale vise-t-il pour ne pas vendre à perte, et pour quelle production le coût d’un kilogramme est-il le plus faible ?

Exercice 2 – Inverses et dérivées (QCM justifié)

6 points

Pour chaque question, une seule proposition est exacte. Indiquer sa lettre et justifier le choix : une réponse sans justification ne rapporte aucun point.

- 1) Si $0 < x < 10^{-3}$, alors :

A. $\frac{1}{x} < 10^{-3}$ B. $\frac{1}{x} > 1\,000$ C. $0 < \frac{1}{x} < 1\,000$ D. $\frac{1}{x} < 0$

- 2) La dérivée de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 4x + \frac{2}{x}$ est :

A. $3x^2 - 4 + \frac{2}{x^2}$ B. $3x^2 - 4 - \frac{2}{x}$ C. $x^2 - 4 - \frac{2}{x^2}$ D. $3x^2 - 4 - \frac{2}{x^2}$

3) Une équation de la tangente à la courbe de la fonction inverse au point d'abscisse 2 est :

A. $y = -\frac{1}{4}x + 1$ **B.** $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ **C.** $y = \frac{1}{4}x$ **D.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$

4) Sur $]0; +\infty[$, la fonction g définie par $g(x) = 2x + \frac{8}{x}$ admet un minimum égal à :

A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 10

Exercice 3 – Un minimum à localiser

4 points

On considère la fonction h définie sur $[1; 6]$ par $h(x) = x^2 + \frac{54}{x}$.

- 1) Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) = \frac{2(x^3 - 27)}{x^2}$.
- 2) On rappelle que la fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que $x^3 - 27$ a le même signe que $x - 3$, puis dresser le tableau de variations de h sur $[1; 6]$ et donner la valeur minimale de h .