

Exercice 1 – Puissances de dix express (réponses courtes)

3 points

Chaque bonne réponse vaut 0,5 point; aucune justification n'est exigée.

N°	Réponse	Éléments de méthode
1	20 %	Coefficient multiplicateur réciproque : $\frac{1}{1,25} = \frac{4}{5} = 0,8$, soit une baisse de 20 % (et non de 25 %).
2	$1,2 \times 10^{-2}$	$3 \times 4 = 12$ et $10^5 \times 10^{-8} = 10^{-3} : 12 \times 10^{-3} = 1,2 \times 10^{-2}$.
3	10 mg	$0,5 \text{ g/L} = 500 \text{ mg/L}$ et $20 \text{ mL} = 0,02 \text{ L} : 500 \times 0,02 = 10$.
4	-3	$0,001 = 10^{-3}$ et $\log(10^k) = k$.
5	10	$10^{\log(5)} = 5$ (définition de log) et $\log(100) = 2 : 5 \times 2 = 10$.
6	8 chiffres	$7 < \log(N) < 8$ donne $10^7 < N < 10^8 : N$ est compris entre 10 000 000 (8 chiffres) et 100 000 000 exclu.

Exercice 2 – Le logarithme à la main

7 points

1) $\log(50) + \log(2) = \log(50 \times 2) = \log(100) = \boxed{2}$; (1 pt)

$$\log(4\,000) - \log(4) = \log\left(\frac{4\,000}{4}\right) = \log(1\,000) = \boxed{3}.$$

2) On écrit chaque nombre à l'aide de puissances de 2 et de 10 : (2 pts)

$$\bullet \log(8) = \log(2^3) = \boxed{3 \log(2)};$$

$$\bullet \log(0,2) = \log\left(\frac{2}{10}\right) = \log(2) - \log(10) = \boxed{\log(2) - 1};$$

$$\bullet \log(500) = \log\left(\frac{1\,000}{2}\right) = \log(1\,000) - \log(2) = \boxed{3 - \log(2)};$$

$$\bullet \log(1,6) = \log\left(\frac{16}{10}\right) = \log(2^4) - \log(10) = \boxed{4 \log(2) - 1}.$$

3) a. $100\,000 = 10^5$. Deux puissances de 10 sont égales si et seulement si leurs exposants sont égaux (on applique log aux deux membres) : (1 pt)

$$10^{2x-1} = 10^5 \iff 2x - 1 = 5 \iff \boxed{x = 3}.$$

b. $3 \times 10^x = 0,3 \iff 10^x = 0,1 = 10^{-1} \iff \boxed{x = -1}$. (0,75 pt)

c. Par définition, $\log(7)$ est l'unique solution de l'équation $10^x = 7 : \boxed{x = \log(7)}$. (0,75 pt)

4) $0,01 = 10^{-2}$. Les deux membres sont strictement positifs et log est strictement croissante : (1,5 pt)

$$10^x > 10^{-2} \iff \log(10^x) > \log(10^{-2}) \iff \boxed{x > -2}, \text{ soit } x \in]-2; +\infty[.$$

Pour $x > 0$: $\log(x) \leq 2 \iff \log(x) \leq \log(100) \iff x \leq 100$ (fonction log strictement croissante), donc $x \in]0 ; 100]$.

Exercice 3 – Diluer un détartrant au laboratoire

10 points

1) $\text{pH} = -\log(10^{-2}) = -(-2) = 2$. (1 pt)

2) Pour tout $c > 0$, d'après la propriété du quotient : (1,5 pt)

$$-\log\left(\frac{c}{10}\right) = -(\log(c) - \log(10)) = -\log(c) + \log(10) = -\log(c) + 1.$$

Diluer une solution 10 fois augmente son pH de 1.

3) a. À chaque dilution, la concentration est divisée par 10, c'est-à-dire multipliée par 10^{-1} : (1,5 pt)

$$c_n = 10^{-2} \times (10^{-1})^n = 10^{-2-n} \quad \text{et} \quad \text{pH} = -\log(10^{-2-n}) = -(-2-n) = 2+n.$$

b. $2+n=5 \iff n=3$: il faut 3 dilutions successives (chacune 10 fois), soit une dilution 1 000 fois en tout. (0,5 pt)

4) Diluer 100 fois revient à diluer deux fois de suite 10 fois ($100 = 10 \times 10$) : d'après la question 2, le pH augmente de 2. (1,5 pt)

La solution d'usage a donc un pH égal à $2+2=4$ (et non $\frac{2}{100} = 0,02$).

L'affirmation est fausse : diluer 100 fois divise la concentration par 100, mais ajoute 2 au pH, puisque $\log(100) = 2$; le pH passe de 2 à 4.

5) a. Chaque étape divise la concentration par 2; cinq étapes successives la divisent par $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$. (1,5 pt)

La concentration devient $\frac{c_0}{32}$ et

$$\text{pH} = -\log\left(\frac{c_0}{32}\right) = -\log(c_0) + \log(32) = 2 + 5\log(2) = 2 + 5 \times 0,3 = 3,5.$$

b. $\text{pH} = 2,7 \iff -\log(c) = 2,7 \iff c = 10^{-2,7}$. (1 pt)

Or $10^{-2,7} = 10^{0,3} \times 10^{-3}$ et, avec $\log(2) = 0,3$, on a $10^{0,3} = 2$ (définition de log).

Donc $c = 2 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$.

6) Notons c_A et c_B les concentrations : $-\log(c_A) = -\log(c_B) - 1$, donc $\log(c_A) = \log(c_B) + 1 = \log(10 c_B)$, d'où $c_A = 10 c_B$. (1,5 pt)

Le flacon A, dont le pH est le plus petit, contient la solution la plus concentrée : sa concentration en ions oxonium est dix fois celle du flacon B.