

Calculatrice interdite

Dans tout le sujet, $\log$ désigne la fonction logarithme décimal. Tous les résultats demandés sont des valeurs exactes.

Exercice 1 – Puissances de dix express (réponses courtes)

3 points

Aucune justification n'est demandée. Écrire le résultat dans la colonne « Réponse » (ou sur la copie, avec le numéro de la question). Chaque réponse courte vaut 0,5 point.

N°	Énoncé	Réponse
1	Un tarif augmente de 25 %. De quel pourcentage doit-il baisser pour revenir à sa valeur initiale ?	
2	Donner l'écriture scientifique de $(3 \times 10^5) \times (4 \times 10^{-8})$.	
3	Une solution contient 0,5 gramme de sucre par litre. Quelle masse de sucre, en milligrammes, contiennent 20 mL de cette solution ?	
4	Donner la valeur de $\log(0,001)$.	
5	Calculer $10^{\log(5)} \times \log(100)$.	
6	Un entier naturel N vérifie $7 < \log(N) < 8$. Combien de chiffres compte son écriture décimale ?	

Exercice 2 – Le logarithme à la main

7 points

1) Écrire $\log(50) + \log(2)$ et $\log(4\,000) - \log(4)$ sous la forme d'un entier.

2) Exprimer en fonction de $\log(2)$ les nombres suivants :

$$\log(8) \quad \log(0,2) \quad \log(500) \quad \log(1,6).$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $10^{2x-1} = 100\,000$ **b.** $3 \times 10^x = 0,3$ **c.** $10^x = 7$ (solution écrite avec $\log$)

4) Résoudre l'inéquation $10^x > 0,01$ d'inconnue x réelle, puis l'inéquation $\log(x) \leq 2$ d'inconnue x strictement positive.

Exercice 3 – Diluer un détartrant au laboratoire

10 points

Au laboratoire d'un lycée, on prépare des solutions d'un détartrant acide. Le pH d'une solution est donné par

$$\text{pH} = -\log(c),$$

où c est la concentration en ions oxonium H_3O^+ , exprimée en mol/L. Diluer une solution « 10 fois », c'est diviser cette concentration par 10 (on admet que ce modèle reste valable tant que le pH ne dépasse pas 6).

- 1) La solution de départ a une concentration $c_0 = 10^{-2}$ mol/L. Calculer son pH.
- 2) Montrer que, pour toute concentration $c > 0$, $-\log\left(\frac{c}{10}\right) = -\log(c) + 1$. Traduire ce résultat par une phrase sur le pH d'une solution diluée 10 fois.
- 3) On dilue n fois de suite la solution de départ, à chaque fois 10 fois (n entier naturel, $n \leq 4$).
 - a. Exprimer la concentration c_n obtenue en fonction de n , puis montrer que son pH vaut $2 + n$.
 - b. Combien de dilutions successives faut-il pour obtenir une solution de pH 5 ?
- 4) La notice du détartrant recommande de le diluer 100 fois avant usage. Un élève affirme : « *diluer 100 fois divise le pH par 100* ». Que penser de cette affirmation ? Donner le pH de la solution d'usage obtenue à partir de la solution de départ.
- 5) Pour cette question, on prendra $\log(2) = 0,3$.
 - a. On divise cinq fois de suite par 2 la concentration de la solution de départ. Justifier que la concentration est alors divisée par 32 et calculer le pH obtenu.
 - b. Une autre solution du même détartrant a un pH de 2,7. Justifier que sa concentration vaut 2×10^{-3} mol/L.
- 6) Deux flacons A et B contiennent ce détartrant ; le pH de A est inférieur de 1 à celui de B. Lequel est le plus concentré ? Combien de fois plus ? Répondre par une phrase justifiée.