

Exercice 1 – La friperie en ligne de Lou

8 points

Partie A – Quatre années de croissance

- 1) Coefficient multiplicateur global : $\frac{105\,000}{48\,000} = 2,1875$. (1 pt)

Taux d'évolution global : $2,1875 - 1 = 1,1875$, soit $\boxed{+118,75\%}$.

- 2) a. Une évolution annuelle moyenne de coefficient x , répétée quatre fois (de 2021 à 2025), donne le même résultat que l'évolution globale : (0,5 pt)

$$48\,000 \times x^4 = 105\,000 \iff \boxed{x^4 = 2,1875}.$$

- b. Sur $]0; +\infty[$, les deux membres sont strictement positifs : (1,5 pt)

$$x^4 = 2,1875 \iff 4 \log(x) = \log(2,1875) \iff \log(x) = \frac{\log(2,1875)}{4}$$

$$\iff x = 10^{\log(2,1875)/4} \quad (\text{définition du logarithme décimal}).$$

$x \approx 1,2161$, donc $t = x - 1 \approx 0,2161$, soit $\boxed{t \approx 21,6\%}$.

Entre 2021 et 2025, le chiffre d'affaires de la friperie a augmenté en moyenne d'environ 21,6 % par an.

Partie B – Les prévisions

- 3) On résout $105\,000 \times 1,15^n > 250\,000$, avec n entier naturel : (1,5 pt)

$$1,15^n > \frac{250\,000}{105\,000} = \frac{50}{21} \iff n \log(1,15) > \log\left(\frac{50}{21}\right) \iff n > \frac{\log(50/21)}{\log(1,15)}$$

car $\log(1,15) > 0$: le sens de l'inégalité est conservé. Or $\frac{\log(50/21)}{\log(1,15)} \approx 6,21$, donc $n \geq 7$.

Vérification : $C(6) \approx 242\,871$ et $C(7) \approx 279\,302$.

Selon ce modèle, le chiffre d'affaires dépassera 250 000 euros à partir de $\boxed{2032}$ ($2025 + 7$).

- 4) On cherche le plus petit entier n tel que $1,15^n \geq 2$: (1 pt)

$$n \log(1,15) \geq \log(2) \iff n \geq \frac{\log(2)}{\log(1,15)} \approx 4,96.$$

Donc $\boxed{n = 5}$: $1,15^4 \approx 1,75 < 2$ et $1,15^5 \approx 2,01 \geq 2$.

Le chiffre d'affaires aura doublé au bout de cinq ans, en 2030.

Partie C – Un entrepôt à financer

- 5) On résout $1,04^n \geq \frac{10}{7}$, n entier naturel. Comme $\log(1,04) > 0$: (1,5 pt)

$$n \log(1,04) \geq \log\left(\frac{10}{7}\right) \iff n \geq \frac{\log(10/7)}{\log(1,04)} \approx 9,09.$$

Le nombre minimal d'annuités est $\boxed{10}$.

- 6) $1,04^9 \approx 1,423$, inférieur à $\frac{10}{7} \approx 1,429$: la condition n'est pas remplie avec neuf annuités. (1 pt)
 Comparer 72 000 euros à 60 000 euros ne suffit pas : chaque année, la somme restant due produit des intérêts à 4 %, qui s'ajoutent à la dette.
 Avec des remboursements de 8 000 euros par an, Lou n'aura soldé son emprunt qu'au bout de dix annuités ; la neuvième annuité laisse encore une petite somme à rembourser.

Exercice 2 – L'hebdomadaire en baisse (copie d'un élève)

5 points

- 1) Les deux membres de l'inégalité $0,92^n < \frac{10}{21}$ sont strictement positifs et la fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: elle conserve l'ordre. On utilise ensuite $\log(a^n) = n \log(a)$.
Ce passage est correct. (1 pt)
- 2) Ruben divise les deux membres par $\log(0,92)$ sans changer le sens de l'inégalité. Or $0,92 < 1$, donc $\log(0,92) < 0$:
diviser par un nombre strictement négatif change le sens d'une inégalité. Il fallait écrire

$$n > \frac{\log(10/21)}{\log(0,92)}.$$

- 3) La diffusion baisse chaque année (on la multiplie par $0,92 < 1$) : une fois passée sous 20 000 exemplaires, elle y reste. Elle ne peut donc pas être inférieure à 20 000 « jusqu'en 2033 » puis redevenir supérieure ; d'ailleurs, en 2025 ($n = 0$), elle vaut 42 000, bien plus que 20 000. (1 pt)
- 4) $\frac{\log(10/21)}{\log(0,92)} \approx 8,90$, donc $n > 8,90$, soit $n \geq 9$ (n entier). (1,5 pt)
 Vérification : en 2033 ($n = 8$), $42\,000 \times 0,92^8 \approx \boxed{21\,555}$ exemplaires ; en 2034 ($n = 9$), $42\,000 \times 0,92^9 \approx \boxed{19\,831}$ exemplaires.
 Selon ce modèle, la diffusion de l'hebdomadaire passera sous les 20 000 exemplaires à partir de 2034.

Exercice 3 – Combien de caractères pour un mot de passe ?

4 points

Nombre de mots de passe. Chaque caractère est choisi parmi $26 + 26 + 10 = 62$ caractères. Avec n caractères, il y a 62^n mots de passe possibles.

Durée de mille ans en secondes. $1\,000 \times 365 \times 24 \times 3\,600 = 31\,536\,000\,000 \approx 3,15 \times 10^{10}$ secondes.
 En mille ans, le pirate teste $10^{10} \times 3,153\,6 \times 10^{10} = 3,153\,6 \times 10^{20}$ mots de passe.

L'affirmation pour 10 caractères. $62^{10} \approx 8,39 \times 10^{17}$. Durée nécessaire : $\frac{8,39 \times 10^{17}}{10^{10}} \approx 8,39 \times 10^7$ secondes, soit environ $\frac{8,39 \times 10^7}{3,15 \times 10^7} \approx 2,7$ ans (une année dure $365 \times 24 \times 3\,600 \approx 3,15 \times 10^7$ secondes).
 L'affirmation est fausse : avec 10 caractères, moins de trois ans suffisent pour essayer tous les mots de passe, loin des mille ans annoncés.

Longueur minimale. On cherche le plus petit entier n tel que $62^n \geq 3,153\,6 \times 10^{20}$:

$$n \log(62) \geq \log(3,153\,6 \times 10^{20}) \iff n \geq \frac{\log(3,153\,6 \times 10^{20})}{\log(62)} \approx \frac{20,50}{1,792} \approx 11,44$$

($\log(62) > 0$). Donc $n = 12$. Contrôle : $62^{11} \approx 5,2 \times 10^{19}$ (environ 165 ans d'essais) et $62^{12} \approx 3,2 \times 10^{21}$ (environ 10 000 ans).

Il faut imposer des mots de passe d'au moins 12 caractères pour que l'essai de toutes les possibilités demande au moins mille ans.

Barème indicatif : nombre de possibilités 62^n (1 pt) ; conversion de mille ans (0,5 pt) ; réfutation chiffrée de l'affirmation (1 pt) ; inéquation résolue avec log ou essais justifiés, conclusion (1,5 pt).

Exercice 4 – Un grand nombre et une équation

3 points

1) $\log(7^{50}) = 50 \log(7) \approx 42,25$. Donc $10^{42} \leq 7^{50} < 10^{43}$ (car $42 \leq 42,25 < 43$ et log est croissante).
Un entier compris entre 10^{42} et 10^{43} (exclu) s'écrit avec 43 chiffres : 7^{50} a 43 chiffres. (1,5 pt)

2) Les deux membres sont strictement positifs : (1,5 pt)

$$2^x = 3^{x-1} \iff x \log(2) = (x-1) \log(3) \iff x \log(3) - x \log(2) = \log(3)$$

$$\iff x (\log(3) - \log(2)) = \log(3).$$

Comme $\log(3) - \log(2) \neq 0$ (car $3 \neq 2$), $x = \frac{\log(3)}{\log(3) - \log(2)} \approx 2,71$.