

Calculatrice autorisée (mode examen)

Dans tout le sujet, $\log$ désigne la fonction logarithme décimal.

Exercice 1 – La friperie en ligne de Lou

8 points

Lou a créé en 2021 une boutique en ligne de vêtements de seconde main. Son chiffre d'affaires annuel est passé de 48 000 euros en 2021 à 105 000 euros en 2025.

Partie A – Quatre années de croissance

- 1) Calculer le taux d'évolution global du chiffre d'affaires entre 2021 et 2025, en pourcentage.
- 2) On note t le taux d'évolution annuel moyen sur cette période et $x = 1 + t$ le coefficient multiplicateur annuel moyen.
 - a. Justifier que $x^4 = 2,1875$.
 - b. À l'aide du logarithme décimal, résoudre cette équation sur $]0; +\infty[$, puis donner t en pourcentage, arrondi à 0,1 %.

Partie B – Les prévisions

Lou prévoit désormais une hausse de 15 % par an. Selon ce modèle, le chiffre d'affaires, en euros, de l'année 2025 + n est $C(n) = 105\,000 \times 1,15^n$.

- 3) Déterminer, en résolvant une inéquation, l'année à partir de laquelle le chiffre d'affaires dépassera 250 000 euros.
- 4) Au bout de combien d'années entières le chiffre d'affaires aura-t-il au moins doublé par rapport à 2025?

Partie C – Un entrepôt à financer

Pour louer et équiper un entrepôt, Lou emprunte 60 000 euros au taux annuel de 4 % et rembourse 8 000 euros par an. On admet que le prêt est entièrement remboursé après n annuités dès que $1,04^n \geq \frac{10}{7}$.

- 5) Déterminer le nombre minimal d'annuités nécessaires.
- 6) La banque avait annoncé « neuf annuités de 8 000 euros suffiront ». Lou rembourserait alors 72 000 euros en tout. Expliquer pourquoi cette annonce est inexacte, puis interpréter le résultat de la question 5 en une phrase.

Exercice 2 – L'hebdomadaire en baisse (copie d'un élève)

5 points

En 2025, un hebdomadaire papier a été diffusé à 42 000 exemplaires par numéro. On estime que sa diffusion baissera de 8 % par an. On cherche à partir de quelle année elle deviendra inférieure à 20 000 exemplaires. Voici la copie de Ruben, où n désigne le nombre d'années après 2025.

Ligne 1 : $42\,000 \times 0,92^n < 20\,000$, donc $0,92^n < \frac{10}{21}$.

Ligne 2 : $\log(0,92^n) < \log\left(\frac{10}{21}\right)$, donc $n \log(0,92) < \log\left(\frac{10}{21}\right)$.

Ligne 3 : $n < \frac{\log(10/21)}{\log(0,92)}$, et ce quotient vaut environ 8,90.

Ligne 4 : donc $n \leq 8$: la diffusion sera inférieure à 20 000 exemplaires jusqu'en 2033.

- 1) Justifier le passage de la ligne 1 à la ligne 2.
- 2) Une erreur se trouve dans la ligne 3. Laquelle ? Expliquer son origine.
- 3) Sans refaire de calcul, expliquer pourquoi la conclusion de la ligne 4 ne peut pas convenir dans cette situation.
- 4) Rédiger la fin correcte de la résolution, puis vérifier le résultat en calculant la diffusion prévue pour 2033 et pour 2034, *arrondie à l'unité*.

Exercice 3 – Combien de caractères pour un mot de passe ?

4 points

Question ouverte. Aucune sous-question n'est posée : la démarche, les calculs et la rédaction sont évalués. Toute piste, même non aboutie, sera prise en compte.

Une entreprise protège son logiciel de gestion par des mots de passe formés de caractères choisis parmi les 26 minuscules, les 26 majuscules et les 10 chiffres. Un pirate disposant d'ordinateurs puissants peut tester 10^{10} mots de passe par seconde. On compte 365 jours dans une année.

Le responsable informatique affirme : « Avec 10 caractères, il faudrait plus de mille ans pour essayer tous les mots de passe possibles. »

Que penser de cette affirmation ? Quelle longueur minimale faut-il imposer pour que l'essai de tous les mots de passe possibles demande au moins mille ans ?

Exercice 4 – Un grand nombre et une équation

3 points

- 1) À l'aide du logarithme décimal, déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 7^{50} .
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^x = 3^{x-1}$. On donnera la valeur exacte, écrite avec $\log(2)$ et $\log(3)$, puis une valeur arrondie à 0,01.