

Exercice 1 – Log, croissance et propriétés (vrai ou faux)

5 points

1) VRAI.

(1,25 pt)

On a $100 < 500 < 1\,000$ et la fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc

$$\log(100) < \log(500) < \log(1\,000), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2 < \log(500) < 3.$$

2) FAUX.

(1,25 pt)

Contre-exemple avec $x = 10$: $\log(10^2) = \log(100) = 2$, alors que $(\log(10))^2 = 1^2 = 1$.

La propriété du cours est $\log(x^2) = 2\log(x)$: le carré porte sur x , pas sur le logarithme.

3) FAUX.

(1,25 pt)

Pour tout réel x , $10^x > 0$: la valeur -3 n'est jamais atteinte. Le logarithme décimal $\log(b)$ n'est défini, comme unique solution de $10^x = b$, que pour $b > 0$.

4) VRAI.

(1,25 pt)

Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$ (deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses).

La fonction $\log$ étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle conserve l'ordre :

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) > \log\left(\frac{1}{b}\right).$$

Autre méthode : $\log(1/a) = -\log(a)$ et $\log(1/b) = -\log(b)$; or $\log(a) < \log(b)$, donc $-\log(a) > -\log(b)$.

Exercice 2 – La salle des percussions (deux documents)

9 points

1) On résout $10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 90$, soit $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 9$.

(1 pt)

Par définition du logarithme décimal, $\frac{I}{I_0} = 10^9$, donc

$$I = 10^9 \times 10^{-12} = \boxed{10^{-3} \text{ W/m}^2}.$$

2) a. Les intensités s'ajoutent : n caisses claires produisent l'intensité $n \times 10^{-3}$.

(1 pt)

$$L_n = 10\log\left(\frac{n \times 10^{-3}}{10^{-12}}\right) = 10\log(n \times 10^9) = 10(\log(n) + \log(10^9))$$

$$L_n = 10(\log(n) + 9) = \boxed{90 + 10\log(n)}.$$

On a utilisé $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ et $\log(10^9) = 9$.

b. $L_4 = 90 + 10\log(4) \approx 96,02$, soit $\boxed{L_4 \approx 96,0 \text{ dB}}$.

(0,5 pt)

Quatre fois plus d'intensité ne donne que 6 dB de plus, et non quatre fois plus de décibels.

- 3) Avec $L_4 = 90 + 10 \log(4)$: (2 pts)

$$D(L_4) = 8 \times 0,5^{(L_4-85)/3} \approx 0,627 \text{ h, soit } 0,627 \times 60 \approx \boxed{38 \text{ min}}.$$

(Avec la valeur arrondie 96,0 dB, on trouve aussi 38 min.)

Une répétition d'une heure à quatre caisses claires n'est pas conforme à la fiche : la durée maximale d'exposition, environ 38 minutes, serait dépassée.

- 4) On pose $x = \frac{L-85}{3}$. L'inéquation devient $8 \times 0,5^x \geq 2,5$, soit $0,5^x \geq 0,3125$. (2 pts)
Les deux membres sont strictement positifs et $\log$ est strictement croissante :

$$\log(0,5^x) \geq \log(0,3125) \iff x \log(0,5) \geq \log(0,3125) \iff x \leq \frac{\log(0,3125)}{\log(0,5)}$$

on change le sens de l'inégalité car $\log(0,5) < 0$ (puisque $0,5 < 1$).

$$\frac{\log(0,3125)}{\log(0,5)} \approx 1,678, \text{ donc } \frac{L-85}{3} \leq 1,678 \dots, \text{ soit } L \leq 85 + 3 \times 1,678 \dots \approx 90,03.$$

Le niveau sonore maximal est $\boxed{90,0 \text{ dB}}$ (arrondi à 0,1 dB) : au-delà, 2 h 30 d'exposition dépassent la durée permise.

- 5) Sans protection, les douze caisses claires produisent $L_{12} = 90 + 10 \log(12) \approx 100,8 \text{ dB}$. (2,5 pts)
Avec les bouchons, le niveau perçu est d'environ $100,8 - 15 = 85,8 \text{ dB}$, inférieur au niveau maximal 90,0 dB trouvé à la question 4.
(On peut aussi calculer $D(85,8) \approx 6,7 \text{ h}$, largement plus que 2,5 h.)
La répétition de 2 h 30 à douze percussionnistes est conforme à la fiche à condition que tous portent leurs bouchons : sans eux, à près de 101 dB, la durée maximale ne serait que d'environ 12 minutes.

Exercice 3 – Écritures et équations avec le logarithme

6 points

- 1) On utilise $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$, $\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$ et $n \log(a) = \log(a^n)$. (1,5 pt)

- $A = \log(40 \times 25) = \log(1\,000) = \log(10^3) = \boxed{3}$;
- $B = \log\left(\frac{0,02}{2}\right) = \log(0,01) = \log(10^{-2}) = \boxed{-2}$;
- $C = \log(5^2) + \log(4) = \log(25 \times 4) = \log(100) = \boxed{2}$.

- 2) $18 = 2 \times 3^2$ et $\frac{16}{27} = \frac{2^4}{3^3}$, donc (1,5 pt)

$$\log(18) = \log(2) + \log(3^2) = \boxed{\log(2) + 2 \log(3)}$$

$$\log\left(\frac{16}{27}\right) = \log(2^4) - \log(3^3) = \boxed{4 \log(2) - 3 \log(3)}.$$

- 3) a. $5 \times 1,2^x = 30 \iff 1,2^x = 6$. Les deux membres sont strictement positifs : (1,5 pt)

$$\log(1,2^x) = \log(6) \iff x \log(1,2) = \log(6) \iff x = \frac{\log(6)}{\log(1,2)} \quad (\log(1,2) \neq 0).$$

La solution est $x = \frac{\log(6)}{\log(1,2)} \approx 9,83$.

b. Pour $x > 0$, les deux membres sont strictement positifs : (1,5 pt)

$$x^5 = 40 \iff \log(x^5) = \log(40) \iff 5 \log(x) = \log(40)$$

$$\iff \log(x) = \frac{\log(40)}{5} \iff x = 10^{\log(40)/5} \quad (\text{définition du logarithme décimal}).$$

La solution est $x = 10^{\log(40)/5} \approx 2,09$ (c'est aussi $40^{\frac{1}{5}}$; vérification : $2,09^5 \approx 39,9$).