

Calculatrice autorisée (mode examen)

Dans tout le sujet, $\log$ désigne la fonction logarithme décimal.

Exercice 1 – Log, croissance et propriétés (vrai ou faux)

5 points

Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Une réponse sans justification (calcul, propriété, contre-exemple) ne rapporte aucun point.

- 1) Le nombre $\log(500)$ est compris entre 2 et 3.
- 2) Pour tout réel x strictement positif, $\log(x^2) = (\log(x))^2$.
- 3) L'équation $10^x = -3$ admet une solution réelle.
- 4) Pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a $\log\left(\frac{1}{a}\right) > \log\left(\frac{1}{b}\right)$.

Exercice 2 – La salle des percussions (deux documents)

9 points

Une école de musique accueille chaque samedi un ensemble de percussions dans une salle de répétition. Le professeur s'appuie sur les deux documents suivants.

Document 1 – Mesurer un niveau sonore

Le niveau sonore L , en décibels (dB), est lié à l'intensité acoustique I , en W/m^2 , par

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{avec } I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2.$$

Lorsque plusieurs instruments jouent ensemble, leurs **intensités** s'ajoutent. À la place du musicien, une caisse claire jouée fort produit un niveau sonore de 90 dB.

Document 2 – Extrait de la fiche « Prévention auditive » de l'école

À 85 dB, on peut être exposé au plus 8 heures par jour. Chaque fois que le niveau augmente de 3 dB, cette durée maximale est divisée par deux.

Niveau sonore (dB)	85	88	91	94	97	100
Durée maximale par jour	8 h	4 h	2 h	1 h	30 min	15 min

Pour un niveau L (en dB) supérieur ou égal à 85, la durée maximale, en heures, est $D(L) = 8 \times 0,5^{(L-85)/3}$.

- 1) À l'aide du document 1, déterminer l'intensité acoustique I produite par une caisse claire seule.
- 2) On fait jouer ensemble n caisses claires identiques (n entier, $n \geq 1$).
 - a. Montrer que le niveau sonore obtenu est $L_n = 90 + 10 \log(n)$.
 - b. Calculer le niveau sonore de quatre caisses claires, **arrondi à 0,1 dB**.
- 3) Quatre caisses claires jouent ensemble. Calculer la durée maximale d'exposition par jour, en minutes, **arrondie à la minute**. Une répétition d'une heure est-elle conforme à la fiche ?

- 4) La prochaine répétition durera 2 h 30. En résolvant l'inéquation $8 \times 0,5^{(L-85)/3} \geq 2,5$, déterminer le niveau sonore maximal qui la rend conforme, *arrondi à 0,1 dB*.
- 5) L'ensemble complet compte douze percussionnistes, chacun jouant à 90 dB, et tous portent des bouchons d'oreille qui abaissent de 15 dB le niveau sonore perçu. La répétition de 2 h 30 est-elle conforme à la fiche? Répondre par une phrase justifiée.

Exercice 3 – Écritures et équations avec le logarithme

6 points

- 1) Écrire chacun des nombres suivants sous la forme d'un entier :

$$A = \log(40) + \log(25) \quad B = \log(0,02) - \log(2) \quad C = 2\log(5) + \log(4).$$

- 2) Exprimer $\log(18)$ et $\log\left(\frac{16}{27}\right)$ en fonction de $\log(2)$ et de $\log(3)$.
- 3) Résoudre les équations suivantes. *On donnera la valeur exacte, écrite avec log, puis une valeur arrondie à 0,01.*
 - a. $5 \times 1,2^x = 30$, d'inconnue x réelle;
 - b. $x^5 = 40$, d'inconnue x réelle strictement positive.