

Exercice 1 – Bases, exposants et courbes (vrai ou faux)

4 points

Chaque affirmation vaut 1 point; une réponse sans justification ne rapporte rien.

Affirmation 1. Fausse.

(1 pt)

$1,02^{-x} = \frac{1}{1,02^x} = \left(\frac{1}{1,02}\right)^x$ et $0 < \frac{1}{1,02} < 1$: la fonction est *décroissante* sur $\mathbb{R}$. Par exemple, $1,02^{-0} = 1$ et $1,02^{-1} = \frac{1}{1,02} < 1$.

Affirmation 2. Fausse.

(1 pt)

Contre-exemple : pour $x = -1$, $3^{-1} = \frac{1}{3}$ et $2^{-1} = \frac{1}{2}$, or $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. (L'inégalité $3^x > 2^x$ n'est vraie que pour $x > 0$; pour $x < 0$, c'est l'inverse.)

Affirmation 3. Vraie.

(1 pt)

Pour tout réel x , $0,5^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$: changer x en $-x$ fait passer d'une fonction à l'autre. Le point $(x; 2^x)$ est sur la courbe de $x \mapsto 2^x$ si et seulement si son symétrique $(-x; 2^x)$ par rapport à l'axe des ordonnées est sur celle de $x \mapsto 0,5^x$. (La justification « $0,5^x = 2^{-x}$ » seule, avec cette remarque, est acceptée.)

Affirmation 4. Vraie.

(1 pt)

Pour tout réel x , $1,5^{2x} = (1,5^2)^x = 2,25^x$ (propriété $a^{nx} = (a^n)^x$).

Exercice 2 – La décoloration du bleu de méthylène

8 points

Partie A – Des mesures toutes les dix minutes

- 1) $\frac{32,00}{40,00} = 0,8$; $\frac{25,60}{32,00} = 0,8$; $\frac{20,48}{25,60} = 0,8$; $\frac{16,38}{20,48} \approx 0,800$. (1 pt)

Toutes les dix minutes, la concentration est multipliée par 0,8 : *elle diminue de 20 % toutes les dix minutes.*

- 2) (c_n) est géométrique de premier terme $c_0 = 40$ et de raison 0,8 : $c_n = 40 \times 0,8^n$. (1 pt)

Une heure correspond à $n = 6$: $c_6 = 40 \times 0,8^6 \approx 10,49 \mu\text{mol/L}$.

Partie B – Un modèle à la minute près

- 3) Le modèle doit redonner les mesures : au bout de 10 minutes, $f(10) = c_1 = 40 \times 0,8$, soit $40 \times a^{10} = 40 \times 0,8$, donc $a^{10} = 0,8$. (1,5 pt)

Le nombre $0,8^{\frac{1}{10}}$ est strictement positif et $\left(0,8^{\frac{1}{10}}\right)^{10} = 0,8^{\frac{1}{10} \times 10} = 0,8$: c'est le réel $a > 0$ cherché,

$$a = 0,8^{\frac{1}{10}} \approx 0,978.$$

Chaque minute, la concentration est multipliée par $a \approx 0,97793$; le taux d'évolution moyen par minute est $a - 1 \approx -2,21\%$ (et non -2%).

- 4) $40 > 0$ et $0 < a < 1$: la fonction f est **décroissante** sur $[0; 150]$. (1 pt)

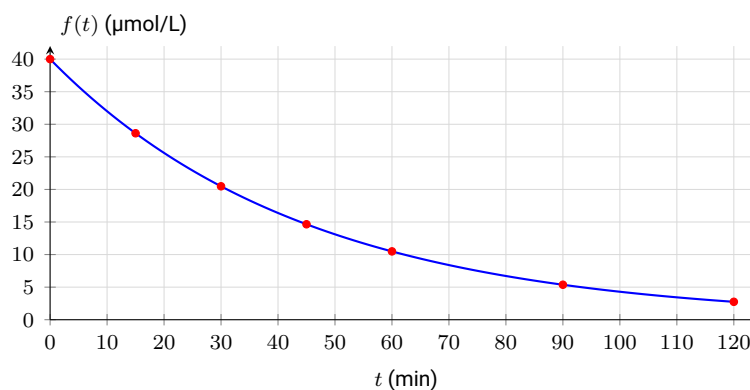
$f(25) = 40 \times a^{25} = 40 \times 0,8^{2,5} \approx 22,90$. Selon le modèle, 25 minutes après le début de la réaction, la concentration vaut environ $22,90 \mu\text{mol/L}$: une valeur entre deux mesures (25,60 à 20 min et 20,48

à 30 min) que le relevé ne donnait pas.

5)

(1,5 pt)

t (min)	0	15	30	45	60	90	120
$f(t)$ ($\mu\text{mol/L}$)	40,0	28,6	20,5	14,7	10,5	5,4	2,7



La courbe descend de plus en plus lentement : chaque minute, la baisse vaut environ 2,21 % d'une concentration qui diminue.

Partie C – Quand la solution est-elle décolorée ?

6) À la calculatrice (tableau de valeurs de f avec un pas de 1) :

(1 pt)

$$f(103) \approx 4,02 > 4 \quad \text{et} \quad f(104) \approx 3,93 < 4.$$

Comme f est décroissante, la concentration reste inférieure à 4 $\mu\text{mol/L}$ après 104 minutes. Selon le modèle, la solution est décolorée à partir de la 104^e minute, soit environ 1 h 44 min après le début de la réaction.

7) Chaque baisse de 20 % porte sur la concentration restante, qui est de plus en plus faible, et non sur la concentration initiale : en cinquante minutes, la concentration est multipliée par $0,8^5 = 0,32768$, elle vaut encore environ 13,1 $\mu\text{mol/L}$, soit près d'un tiers de la valeur de départ. Selon le modèle, la concentration $40 \times a^t$ reste d'ailleurs toujours strictement positive. (1 pt)

Exercice 3 – Intercaler des mesures au tableur

4 points

1) En D2 : $=(A2+A3)/2$, qui affiche 5 ; recopiée vers le bas, elle donne 15, 25, 35. (0,5 pt)

2) E2 affiche $\sqrt{40 \times 32} = \sqrt{1280} \approx 35,78$. Après recopie vers le bas, E4 contient $=\text{RACINE}(B4*B5)$ (les références relatives descendent de deux lignes). (0,75 pt)

3) En recopiant $=40*H2^D2$ vers le bas, la référence H2 devient H3, H4, H5 : ces cellules sont vides, le tableur calcule $40 \times 0^{15} = 0$ au lieu de $f(15)$. Il faut bloquer la référence de la cellule contenant a : (0,75 pt)

$$=40*\$H\$2^D2 \quad (\text{ou } =40*H\$2^D2).$$

4) Pour tous réels t_1 et t_2 de $[0; 150]$:

(1,25 pt)

$$f(t_1) \times f(t_2) = 40 a^{t_1} \times 40 a^{t_2} = 1600 \times a^{t_1+t_2} = \left(40 \times a^{\frac{t_1+t_2}{2}}\right)^2,$$

car $\left(a^{\frac{t_1+t_2}{2}}\right)^2 = a^{t_1+t_2}$. Comme $40 \times a^{\frac{t_1+t_2}{2}} > 0$, la moyenne géométrique vaut

$$\sqrt{f(t_1) \times f(t_2)} = 40 \times a^{\frac{t_1+t_2}{2}} = f\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right).$$

Lorsque les mesures suivent exactement le modèle, chaque point intercalé (abscisse D , ordonnée E) est sur la courbe de f : les colonnes E et F affichent les mêmes valeurs. Ici, c'est le cas au centième près (par exemple $E5 \approx 18,32$ et $F5 = f(35) \approx 18,32$).

5) Moyenne arithmétique des deux premières mesures : $\frac{40+32}{2} = 36$; moyenne géométrique : $\approx 35,78$; $f(5) = 40 \times 0,8^{0,5} \approx 35,78$. (0,75 pt)

La moyenne arithmétique place le point au-dessus de la courbe : elle ne respecte pas l'évolution à taux constant. La moyenne géométrique, elle, redonne exactement la valeur du modèle exponentiel.

Exercice 4 – Une collecte de sang (transversal : suites)

4 points

1) Une hausse de 5 % revient à multiplier par 1,05 : pour tout n , $u_{n+1} = 1,05 \times u_n$. La suite (u_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme 80 : $u_n = 80 \times 1,05^n$. (1 pt)

En 2030 ($n = 4$) : $u_4 = 80 \times 1,05^4 \approx 97,24$, soit environ 97 donneurs.

2) Les indices vont de 0 à 9 : la somme compte 10 termes (une collecte par an de 2026 à 2035). (1,25 pt)

$$\sum_{k=0}^9 u_k = 80 \times \frac{1 - 1,05^{10}}{1 - 1,05} = 1600 \times (1,05^{10} - 1) \approx 1006,23,$$

soit environ 1006 dons.

3) $1006 \geq 1000$: selon les prévisions, l'objectif est atteint. En s'arrêtant en 2034, la somme ne compte que 9 termes : (1 pt)

$$\sum_{k=0}^8 u_k = 1600 \times (1,05^9 - 1) \approx 882 < 1000.$$

L'objectif de 1000 dons n'est atteint que de justesse, et seulement avec la collecte de 2035 : une seule collecte de moins, ou une hausse un peu plus faible que 5 % par an, suffirait à le manquer.

4) À la calculatrice : $u_8 = 80 \times 1,05^8 \approx 118,2 < 120$ et $u_9 = 80 \times 1,05^9 \approx 124,1 > 120$; la suite est croissante (raison $1,05 > 1$). Le nombre de donneurs dépasserait 120 pour la première fois en $2026 + 9 = \text{2035}$. (0,75 pt)