

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 – Bases, exposants et courbes (vrai ou faux)

4 points

Dire si chacune des affirmations ci-dessous est vraie ou fausse, puis **le justifier** par un calcul, une propriété ou un contre-exemple. Sans justification, la réponse ne rapporte rien.

Affirmation 1. La fonction $x \mapsto 1,02^{-x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 2. Pour tout réel x , $3^x > 2^x$.

Affirmation 3. Les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto 0,5^x$ et $x \mapsto 2^x$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

Affirmation 4. Pour tout réel x , $1,5^{2x} = 2,25^x$.

Exercice 2 – La décoloration du bleu de méthylène

8 points

Lors d'un TP de cinétique chimique, des élèves suivent au spectrophotomètre la concentration d'une solution de bleu de méthylène qui se décolore progressivement. Ils obtiennent les mesures suivantes (t est le temps écoulé depuis le début de la réaction).

Temps t (en min)	0	10	20	30	40
Concentration (en $\mu\text{mol/L}$)	40,00	32,00	25,60	20,48	16,38

Partie A – Des mesures toutes les dix minutes

- 1) Calculer les quotients de chaque concentration par la précédente, arrondis à 0,001. Traduire le résultat par une évolution en pourcentage toutes les dix minutes.
- 2) Pour tout entier naturel n , on note c_n la concentration, en $\mu\text{mol/L}$, après n périodes de dix minutes; on admet que (c_n) est géométrique de raison 0,8, avec $c_0 = 40$. Exprimer c_n en fonction de n et prévoir la concentration au bout d'une heure, arrondie au centième.

Partie B – Un modèle à la minute près

On modélise la concentration, en $\mu\text{mol/L}$, t minutes après le début de la réaction, par $f(t) = 40 \times a^t$ pour $t \in [0; 150]$, où a est un réel strictement positif.

- 3) Expliquer pourquoi le modèle impose $a^{10} = 0,8$, puis en déduire que $a = 0,8^{\frac{1}{10}}$. Donner une valeur approchée de a à 0,001 près et le taux d'évolution moyen de la concentration par minute, en pourcentage arrondi à 0,01 %.
- 4) Déterminer le sens de variation de f sur $[0; 150]$. Calculer $f(25)$, arrondi au centième, et interpréter ce résultat.
- 5) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (valeurs arrondies au dixième), puis tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0; 120]$, en prenant 1 cm pour 10 minutes en abscisse et 1 cm pour 5 $\mu\text{mol/L}$ en ordonnée.

t (min)	0	15	30	45	60	90	120
$f(t)$ ($\mu\text{mol/L}$)							

Partie C – Quand la solution est-elle décolorée ?

On considère que la solution est décolorée lorsque sa concentration devient inférieure à 4 $\mu\text{mol/L}$.

- 6) À l'aide de la calculatrice, déterminer la première minute entière à partir de laquelle la solution est décolorée selon le modèle.
- 7) Un élève affirme : « La concentration baisse de 20 % toutes les dix minutes, donc de 100 % en cinquante minutes : la solution sera incolore au bout de cinquante minutes. » Expliquer en une ou deux phrases pourquoi ce raisonnement est faux.

Exercice 3 – Intercaler des mesures au tableur

4 points

Pour tracer une courbe plus précise sans refaire de mesures, un élève intercale un point entre deux mesures consécutives du TP de l'exercice 2 : il prend comme abscisse la *moyenne arithmétique* des deux temps et comme ordonnée la *moyenne géométrique* des deux concentrations. Il utilise la feuille de calcul ci-dessous ; la cellule H2 contient la formule $=0,8^{(1/10)}$, c'est-à-dire le nombre a de l'exercice 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t (min)	mesure		t intercalé	moyenne géom.	modèle $f(t)$		a
2	0	40,00						0,977 93
3	10	32,00						
4	20	25,60						
5	30	20,48						
6	40	16,38						

- 1) Quelle formule faut-il saisir en D2, puis recopier jusqu'en D5, pour obtenir le temps situé au milieu de deux mesures consécutives ?
- 2) La cellule E2 contient la formule $=\text{RACINE}(B2*B3)$. Quel nombre affiche-t-elle, arrondi au centième ? Quelle formule contient la cellule E4 après recopie vers le bas ?
- 3) En F2, on veut la valeur du modèle f au temps D2, puis recopier la formule vers le bas. Un élève saisit $=40*H2^{D2}$. Expliquer pourquoi la recopie vers le bas donnera des résultats faux, et corriger la formule.
- 4) Montrer que, pour tous réels t_1 et t_2 de $[0 ; 150]$, la moyenne géométrique de $f(t_1)$ et $f(t_2)$ est égale à $f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$. Indication : écrire $f(t_1) \times f(t_2)$ sous la forme $1600 \times a^{\dots}$, puis calculer $\left(f\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)\right)^2$. Que peut-on en déduire pour les points intercalés lorsque les mesures suivent exactement le modèle ?
- 5) Pourquoi n'aurait-on pas dû prendre pour ordonnée la moyenne arithmétique des deux concentrations ? On comparera, pour les deux premières mesures, les deux moyennes à $f(5)$.

Exercice 4 – Une collecte de sang (transversal : suites)

4 points

Une entreprise accueille chaque année une collecte de sang dans ses locaux. En 2026, 80 salariés ont donné leur sang ; le service de santé au travail espère que ce nombre augmentera de 5 % par an. Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre prévu de donneurs lors de la collecte de l'année $2026 + n$, avec $u_0 = 80$.

- 1) Justifier que la suite (u_n) est géométrique, préciser sa raison et exprimer u_n en fonction de n . Prévoir le nombre de donneurs en 2030, arrondi à l'unité.

- 2) Le nombre total de dons prévus de 2026 à 2035 s'écrit $\sum_{k=0}^9 u_k$. Combien de termes cette somme compte-t-elle? Calculer ce total, arrondi à l'unité.
- 3) L'établissement de collecte demande à l'entreprise de viser 1 000 dons au total sur ces dix collectes. Cet objectif sera-t-il atteint selon les prévisions? Le serait-il en s'arrêtant en 2034? Conclure par une phrase.
- 4) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année au cours de laquelle le nombre de donateurs dépasserait 120 pour la première fois.