

Exercice 1 – Puissances, signes et hausses (réponses courtes)

3 points

Chaque bonne réponse vaut 0,5 point; aucune justification n'est exigée.

N°	Réponse	Éléments de méthode
1	$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$	Identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x$ et $b = \frac{2}{3}$, car $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.
2	$]1; 3[$	La parabole d'équation $y = -2(x - 1)(x - 3)$ est tournée vers le bas ($-2 < 0$) et coupe l'axe des abscisses en 1 et 3 : elle est au-dessus de l'axe strictement entre les racines.
3	$+21\%$	$1,1 \times 1,1 = 1,21$.
4	$0,125$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.
5	croissante	$x \mapsto 0,6^x$ est décroissante ($0 < 0,6 < 1$); le facteur $-4 < 0$ inverse le sens.
6	9	$\frac{3^{x+2}}{3^x} = 3^{x+2-x} = 3^2 = 9$.

Exercice 2 – Le prix du cacao d'une chocolaterie

9 points

- 1) Coefficient multiplicateur entre janvier 2024 et janvier 2026 : $\frac{12,10}{10} = 1,21$, soit une hausse de 21% . (2 pt)

Le comptable a divisé 21 % par 2. Or la hausse de la deuxième année s'applique à un prix déjà augmenté : ce sont les coefficients multiplicateurs annuels qui se multiplient. Le taux annuel moyen t vérifie

$$(1 + t)^2 = 1,21 \quad \text{donc} \quad 1 + t = 1,21^{\frac{1}{2}} = 1,1$$

(car $1,1 > 0$ et $1,1^2 = 1,21$). Le taux annuel moyen est de 10% , et non de 10,5 % : c'est d'ailleurs ce que montre le document 1 ($10 \rightarrow 11$ puis $11 \rightarrow 12,10$, deux hausses de 10 %). Avec 10,5 % par an, on obtiendrait $10 \times 1,105^2 = 12,210\,25$ €, pas 12,10 €.

- 2) a. $p(0) = 10 \times 1,1^0 = 10$; $p(1) = 10 \times 1,1 = 11$; $p(2) = 10 \times 1,21 = 12,1$: on retrouve les prix de 2024, 2025 et 2026. (1 pt)

- b. $p(1,5) = 10 \times 1,1^{1,5} = 10 \times 1,1^{1+0,5} = 10 \times 1,1 \times 1,1^{0,5} = 11 \times 1,1^{0,5}$ (propriété $a^{x+y} = a^x a^y$). (1 pt)

Comme $1,1 > 1$, la fonction $x \mapsto 1,1^x$ est croissante; de $0 < 0,5 < 1$ on déduit $1,1^0 < 1,1^{0,5} < 1,1^1$, c'est-à-dire $1 < 1,1^{0,5} < 1,1$. En multipliant par $11 > 0$: $11 < p(1,5) < 12,1$. Au 1^{er} juillet 2025, le modèle donne un prix compris entre 11 € et 12,10 €.

- 3) Douze hausses mensuelles de taux m équivalent à une hausse annuelle de 10 % : (1 pt)

$$(1 + m)^{12} = 1,1 \quad \text{donc} \quad 1 + m = 1,1^{\frac{1}{12}}$$

D'après le résultat admis, $\left(1 + \frac{10}{12}\%\right)^{12} > 1,10 = (1 + m)^{12}$.

Si l'on avait $m \geq \frac{10}{12}\%$, on aurait $1 + m \geq 1 + \frac{10}{12}\% > 0$ et, en multipliant douze fois membre à membre ces nombres positifs, $(1 + m)^{12} \geq \left(1 + \frac{10}{12}\%\right)^{12} > 1,10$: c'est impossible. Donc

$$m < \frac{10}{12}\%.$$

Les hausses mensuelles portent sur un prix déjà augmenté : douze hausses de $\frac{10}{12}\%$ donneraient plus de 10 % sur l'année.

4) Les trois courbes partent du même point $(0 ; 12,1)$: le prix de janvier 2026. Chaque scénario correspond à une fonction $x \mapsto 12,1 \times a^x$, avec $a = 1,1$ (A), $a = 1,05$ (B) et $a = 0,9$ (C). (2 pt)

- Scénario C : $0 < 0,9 < 1$, la fonction est décroissante : c'est la seule courbe qui descend, $\mathcal{C}_2$.
- Scénarios A et B : $1,1 > 1$ et $1,05 > 1$, les deux fonctions sont croissantes. Pour $x > 0$, $1,1^x > 1,05^x$ (au bout d'un an par exemple, 13,31 € contre 12,705 €) : la courbe du scénario A est au-dessus de celle du scénario B. Donc A correspond à $\mathcal{C}_3$ et B à $\mathcal{C}_1$.

5) Au 1^{er} janvier 2028 ($x = 2$) : $12,1 \times 1,1^2 = 12,1 \times 1,21 = 14,641$ € le kilogramme. (2 pt)

Surcoût pour 500 kg : $500 \times (14,641 - 12,10) = 500 \times 2,541 = 1\,270,50$ €.

Si la hausse de 10 % par an se poursuit, la chocolaterie paiera ses fèves 14,64 € le kilogramme en 2028, soit environ 1 270 € de plus qu'en 2026 pour la même quantité : la gérante devra le répercuter sur ses prix de vente ou négocier avec son fournisseur.

Exercice 3 – Puissances à exposant réel

8 points

1) (2 pt)

$$7^x \times 7^x = (7 \times 7)^x = 49^x \quad (0,5^x)^2 = 0,5^{2x} = (0,5^2)^x = 0,25^x$$

$$\frac{6^x}{2^x} = \left(\frac{6}{2}\right)^x = 3^x \quad 0,2^{-x} = \frac{1}{0,2^x} = \left(\frac{1}{0,2}\right)^x = 5^x.$$

2) (2 pt)

- $16^{0,5} = 4$, car $4 > 0$ et $4^2 = 16$ (en effet $(16^{0,5})^2 = 16^1 = 16$);
- $16^{0,25} = 2$, car $2^4 = 16$, donc $16^{0,25} = (2^4)^{0,25} = 2^1 = 2$;
- $4^{1,5} = 4^1 \times 4^{0,5} = 4 \times 2 = 8$;
- $0,25^{-0,5} = \left(\frac{1}{0,25}\right)^{0,5} = 4^{0,5} = 2$.

3) Une fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) est strictement croissante ou strictement décroissante : deux puissances de même base sont égales si et seulement si leurs exposants sont égaux. (2 pt)

- $2^x = 32 \iff 2^x = 2^5 \iff x = 5$;
- $0,5^x = 4 \iff 0,5^x = 0,5^{-2}$ (car $0,5^{-2} = \frac{1}{0,25} = 4$) $\iff x = -2$;

$$\bullet \quad 3^{2x-1} = 27 \iff 3^{2x-1} = 3^3 \iff 2x - 1 = 3 \iff \boxed{x = 2}.$$

4)

(2 pt)

- $0 < 0,7 < 1$: la fonction $x \mapsto 0,7^x$ est décroissante. Comme $1,5 < 2$, on a $\boxed{0,7^{1,5} > 0,7^2}$.
- $1,3 > 1$: la fonction $x \mapsto 1,3^x$ est croissante. Comme $-2 < 0$, on a $1,3^{-2} < 1,3^0$, c'est-à-dire $\boxed{1,3^{-2} < 1}$. (Autre méthode : $1,3^{-2} = \frac{1}{1,69}$ et $1,69 > 1$.)