

Exercice 1 – Trois fonctions, trois sens de variation

6 points

Rappel : la fonction $x \mapsto k a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) a le sens de variation de $x \mapsto a^x$ si $k > 0$ (croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$), et le sens contraire si $k < 0$.

1) (3 pt)

- $f(x) = 4 \times 0,7^x : 0 < 0,7 < 1$, donc $x \mapsto 0,7^x$ est décroissante; $k = 4 > 0$ conserve le sens : **f est décroissante sur $\mathbb{R}$.**
- $g(x) = -0,5 \times 1,2^x : 1,2 > 1$, donc $x \mapsto 1,2^x$ est croissante; $k = -0,5 < 0$ inverse le sens : **g est décroissante sur $\mathbb{R}$.**
- $h(x) = 3 \times 0,5^{-x} = 3 \times \frac{1}{0,5^x} = 3 \times \left(\frac{1}{0,5}\right)^x = 3 \times 2^x : 2 > 1$ et $k = 3 > 0$, donc **h est croissante sur $\mathbb{R}$.**

2) Pour tout réel $x : p(x+1) = 250 \times 1,04^{x+1} = 250 \times 1,04^x \times 1,04^1 = 1,04 \times p(x)$. (1,5 pt)

Quand x augmente de 1, la valeur de $p(x)$ est multipliée par 1,04 : elle augmente de 4 %, quelle que soit la valeur de départ x (entière ou non).

3) (1,5 pt)

$$A(x) = 2^{3x} \times 2^{-x} = 2^{3x-x} = 2^{2x} = (2^2)^x = \boxed{4^x} \quad B(x) = \frac{25^x}{5^x} = \left(\frac{25}{5}\right)^x = \boxed{5^x}.$$

(Pour $B : 25^x = (5^2)^x = 5^{2x}$, et $\frac{5^{2x}}{5^x} = 5^{2x-x} = 5^x$.)

Exercice 2 – La copie d'Adam

7 points

1) (4 pt)

- Faux.** Un exposant négatif ne rend pas le nombre négatif : $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Donc $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \boxed{\frac{1}{25}}$ (soit 0,04, un nombre positif).
- Faux.** Adam a multiplié 9 par l'exposant. $9^{0,5}$ n'est pas un produit : c'est le nombre positif dont le carré vaut 9 (voir question 2), donc $9^{0,5} = \boxed{3}$.
- Juste.** $(1,2^x)^3 = 1,2^{3x}$ (propriété $(a^x)^n = a^{nx}$), puis $1,2^{3x} \times 1,2^{2x} = 1,2^{3x+2x} = 1,2^{5x}$ (propriété $a^x \times a^y = a^{x+y}$) : $k = 5$.
- Faux.** Comme $0 < 0,8 < 1$, la fonction $x \mapsto 0,8^x$ est *décroissante* sur $\mathbb{R}$: elle range les images dans l'ordre contraire des nombres. Puisque $2,5 < 3$, on a $\boxed{0,8^{2,5} > 0,8^3}$.

2) D'après la propriété $(a^x)^n = a^{nx} : (9^{0,5})^2 = 9^{0,5 \times 2} = 9^1 = 9$. (1,5 pt)

Le nombre $9^{0,5}$ est strictement positif (comme toute puissance de base $9 > 0$) et son carré vaut 9 : c'est $\sqrt{9}$, donc $9^{0,5} = 3$. Avec la réponse d'Adam, on aurait $4,5^2 = 20,25 \neq 9$.

3) Oui. Comme $1,8 > 1$, la fonction $x \mapsto 1,8^x$ est *croissante* sur $\mathbb{R}$: elle conserve l'ordre, donc $2,5 < 3$ entraîne bien $1,8^{2,5} < 1,8^3$. (1,5 pt)

La règle « plus l'exposant est grand, plus la puissance est grande » n'est vraie que pour une base supérieure à 1 ; Adam l'a appliquée à la base 0,8, pour laquelle c'est le contraire.

Exercice 3 — L'activité d'un service d'hospitalisation à domicile

7 points

Barème indicatif : évolution globale (1 pt); taux annuel moyen par l'exposant $\frac{1}{6}$ (2 pts); critique du « plus de 11 % » (1 pt); projection 2028 (1,5 pt); année du cap (1 pt); conclusion rédigée (0,5 pt).

Première affirmation : « près de 69 % en six ans ». Le coefficient multiplicateur global est $\frac{3\,120}{1\,850} \approx 1,686\,5$, soit une hausse de 68,6 % environ. **Cette affirmation est juste.**

Deuxième affirmation : « plus de 11 % par an ». Le rapport a divisé 68,6 % par 6 ($\approx 11,4\%$). Or chaque hausse annuelle porte sur l'effectif de l'année précédente, déjà augmenté : ce sont les coefficients multiplicateurs qui se multiplient. Le taux annuel moyen t vérifie

$$(1+t)^6 = \frac{3\,120}{1\,850}, \quad \text{donc} \quad 1+t = \left(\frac{3\,120}{1\,850}\right)^{\frac{1}{6}} \approx 1,091\,0.$$

Le taux d'évolution annuel moyen est d'environ 9,1 %. **L'affirmation est fausse** : la hausse moyenne est d'un peu plus de 9 % par an, pas de plus de 11 %. (Contrôle : $1\,850 \times 1,091^6 \approx 3\,120$, alors que $1\,850 \times 1,114^6 \approx 3\,536$.)

Troisième affirmation : « plus de 4 200 patients en 2028 ». 2028 est trois ans après 2025. Avec le taux moyen réel :

$$3\,120 \times \left(\frac{3\,120}{1\,850}\right)^{\frac{3}{6}} \approx 3\,120 \times 1,091^3 \approx \text{4\,052 patients},$$

ce qui **n'atteint pas** 4 200. (Le rapport a en fait appliqué 11,4 % par an : $3\,120 \times 1,114^3 \approx 4\,313$.)

En poursuivant : 2029 : $3\,120 \times 1,091^4 \approx 4\,420 > 4\,200$. Le cap des 4 200 patients serait franchi en **2029**.

Conclusion. La progression de près de 69 % en six ans est exacte, mais elle correspond à une hausse moyenne d'environ 9,1 % par an, et non de plus de 11 % : le rapport a divisé le taux global par six, en oubliant que chaque hausse porte sur un effectif déjà augmenté. Au rythme réellement observé, l'établissement prendrait en charge environ 4 052 patients en 2028, moins que les 4 200 annoncés; ce cap ne serait franchi qu'en 2029.