

## Exercice 1 – Compter les termes avant d'additionner

6 points

- 1) a. Pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3$ . (1 pt)  
L'écart entre deux termes consécutifs est constant : la suite  $(u_n)$  est **arithmétique de raison**  $\boxed{3}$  (et de premier terme  $u_0 = 2$ ).

- b. Les indices vont de 10 à 29 : la somme compte  $29 - 10 + 1 = \boxed{20}$  termes. (2 pt)  
Premier terme  $u_{10} = 32$ , dernier terme  $u_{29} = 89$  :

$$S = 20 \times \frac{u_{10} + u_{29}}{2} = 20 \times \frac{32 + 89}{2} = 10 \times 121 = \boxed{1\,210}.$$

- 2) a. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 800 \times 0,75^{n+1} = 0,75 \times v_n$  : la suite  $(v_n)$  est **géométrique de raison**  $0,75$  et de premier terme  $v_0 = 800$ . (1 pt)  
Ses termes sont strictement positifs ( $800 > 0$ ) et sa raison est comprise entre 0 et 1 : la suite  $(v_n)$  est **décroissante**.

- b.  $T$  est la somme des 10 premiers termes ( $v_0$  à  $v_9$ ) : (1 pt)

$$T = 800 \times \frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} = 3\,200 \times (1 - 0,75^{10}) \approx \boxed{3\,019,80}.$$

- c. De même, pour tout entier naturel  $n$  : (1 pt)

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = 800 \times \frac{1 - 0,75^{n+1}}{1 - 0,75} = 3\,200 \times (1 - 0,75^{n+1}).$$

Comme  $0,75^{n+1} > 0$ , on a  $1 - 0,75^{n+1} < 1$ , donc la somme est strictement inférieure à 3 200.

## Exercice 2 – La copie de Malo

7 points

- 1) a. **Faux**. Malo a calculé la moyenne *arithmétique*. La moyenne géométrique de deux nombres positifs  $a$  et  $b$  est  $\sqrt{ab}$  : (1,5 pt)

$$\sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = \boxed{6}.$$

(Vérification : 2 ; 6 ; 18 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3.)

- b. **Faux**. Malo a confondu le *taux* d'évolution ( $4\% = 0,04$ ) avec le *coefficient multiplicateur*. Augmenter de 4 %, c'est multiplier par  $1 + 0,04 = 1,04$  : la suite est géométrique de raison 1,04 et (1,5 pt)

$$\boxed{L_n = 650 \times 1,04^n}.$$

- c. **Faux**. Le nombre de termes (6) et la raison (3) sont justes, mais Malo a pris  $w_0 = 5$  comme premier terme alors que la somme commence à  $w_1 = 5 \times 3 = 15$ . La formule s'écrit « pre-

mier terme de la somme  $\times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$  » : (2 pt)

$$\sum_{k=1}^6 w_k = 15 \times \frac{1 - 3^6}{1 - 3} = 15 \times \frac{1 - 729}{-2} = 15 \times 364 = \boxed{5\,460}.$$

(Contrôle :  $15 + 45 + 135 + 405 + 1\,215 + 3\,645 = 5\,460$ ; le résultat de Malo, 1 820, est  $w_0 + \dots + w_5$ .)

**d. Juste.** La raison 4, le premier terme 7, le décompte des termes ( $83 = 7 + 4 \times 19$  : les termes vont du rang 0 au rang 19, soit 20 termes) et la formule sont corrects : la somme vaut bien  $\boxed{900}$ . (1 pt)

2) Avec la formule de Malo :  $L_1 = 650 \times 0,04 = 26$  €. (0,5 pt)

Un loyer qui augmente ne peut pas passer de 650 € à 26 € : avec une raison 0,04 comprise entre 0 et 1, la suite serait décroissante, ce qui contredit l'augmentation annoncée. Le loyer correct est  $L_1 = 650 \times 1,04 = 676$  €.

3) Les termes sont ceux de la suite arithmétique de terme général  $7 + 4k$ , pour  $k$  allant de 0 à 19 : (0,5 pt)

$$7 + 11 + 15 + \dots + 83 = \sum_{k=0}^{19} (7 + 4k).$$

(On peut aussi écrire  $\sum_{k=1}^{20} (3 + 4k)$ .)

### Exercice 3 – Les téléconsultations d'une maison de santé

7 points

Barème indicatif : modélisation par une suite arithmétique (1,5 pt); nombre de termes et somme exprimée en fonction de la hausse (2 pts); hausse minimale (1,5 pt); capacité des médecins (1,5 pt); conclusion rédigée (0,5 pt).

**Modélisation.** Notons  $r$  la hausse hebdomadaire (un nombre entier) et  $t_n$  le nombre de téléconsultations de la semaine  $n$  ( $n \geq 1$ ). On ajoute chaque semaine le même nombre  $r$  : la suite  $(t_n)$  est arithmétique de premier terme  $t_1 = 140$  et de raison  $r$ , donc  $t_n = 140 + (n - 1)r$ .

**Le total sur 20 semaines.** Le nombre total de téléconsultations des 20 premières semaines est la somme de 20 termes consécutifs de cette suite, de  $t_1 = 140$  à  $t_{20} = 140 + 19r$  :

$$\sum_{n=1}^{20} t_n = 20 \times \frac{140 + (140 + 19r)}{2} = 10 \times (280 + 19r) = 2\,800 + 190r.$$

**La hausse minimale.** On veut  $2\,800 + 190r \geq 5\,000$ , soit  $190r \geq 2\,200$ , c'est-à-dire  $r \geq \frac{2\,200}{190} \approx 11,58$ .

Le plus petit entier qui convient est  $\boxed{r = 12}$ .

Vérification : avec  $r = 11$ , le total est  $2\,800 + 2\,090 = 4\,890 < 5\,000$ ; avec  $r = 12$ , il est  $2\,800 + 2\,280 = 5\,080 \geq 5\,000$ .

**La capacité des médecins.** Avec  $r = 12$ , la suite est croissante; la semaine la plus chargée des 20 premières est la dernière :  $t_{20} = 140 + 19 \times 12 = 368 \leq 400$ . La capacité est respectée.

Au-delà :  $t_n \leq 400 \iff 140 + 12(n - 1) \leq 400 \iff 12(n - 1) \leq 260 \iff n - 1 \leq 21,6\dots$ , donc  $n \leq 22$ . On a  $t_{22} = 392$  et  $t_{23} = 404 > 400$ .

**Conclusion.** La directrice doit prévoir au minimum 12 téléconsultations de plus chaque semaine : la maison de santé en réalisera alors 5 080 en 20 semaines et obtiendra l'aide (avec 11 de plus par semaine, elle n'en ferait que 4 890). Ce rythme reste compatible avec la capacité des médecins pendant les 20 semaines (368 téléconsultations la vingtième), et il pourra être maintenu jusqu'à la semaine 22 (392); dès la semaine 23, il faudrait dépasser 400 téléconsultations, donc ralentir la hausse ou recruter.