

Exercice 1 – Raisons, croissances et sommes (vrai ou faux)

5 points

Chaque affirmation vaut 1,25 point; une réponse sans justification ne rapporte rien.

Affirmation 1. Vraie.

(1,25 pt)

$\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$ et $\frac{32}{24} = \frac{4}{3}$: on passe de chaque nombre au suivant en multipliant par le même nombre $\frac{4}{3}$. Ce sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{4}{3}$ (on peut aussi vérifier que 24 est la moyenne géométrique de 18 et 32 : $\sqrt{18 \times 32} = \sqrt{576} = 24$).

Affirmation 2. Fausse.

(1,25 pt)

$2,25 - 1,5 = 0,75$ mais $3,25 - 2,25 = 1$: les écarts entre termes consécutifs ne sont pas égaux. (De même, 2,25 n'est pas la moyenne arithmétique $\frac{1,5 + 3,25}{2} = 2,375$.)

Affirmation 3. Fausse.

(1,25 pt)

Le prix augmente chaque année du même *montant* 0,50 € : les prix successifs forment une suite arithmétique de raison 0,5. C'est une croissance **linéaire**. Une croissance exponentielle correspondrait à une augmentation du même *pourcentage* chaque année (suite géométrique).

Affirmation 4. Vraie.

(1,25 pt)

La somme compte 10 termes (k de 0 à 9) de la suite géométrique de premier terme 2 000 et de raison 0,9 :

$$\sum_{k=0}^9 w_k = 2\,000 \times \frac{1 - 0,9^{10}}{1 - 0,9} = 20\,000 \times (1 - 0,9^{10}) \approx 13\,026,43 > 13\,000.$$

Exercice 2 – Le plan d'épargne de Soline

10 points

Partie A – Ce que devient un seul versement

- 1) Augmenter de 3 % revient à multiplier par 1,03.

(1 pt)

$$p_1 = 1\,500 \times 1,03 = \boxed{1\,545} \text{ et } p_2 = 1\,545 \times 1,03 = \boxed{1\,591,35}.$$

- 2) Chaque année, la valeur est multipliée par le même nombre 1,03 : pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 1,03 \times p_n$. La suite (p_n) est **géométrique de raison** 1,03 et de premier terme $p_0 = 1\,500$, donc

(1 pt)

$$\boxed{p_n = 1\,500 \times 1,03^n}.$$

- 3) Le 1^{er} janvier 2036 correspond à $n = 10$: $p_{10} = 1\,500 \times 1,03^{10} \approx \boxed{2\,015,87}$ €.

(1 pt)

Le versement de 2035 n'a bénéficié que d'un ajout d'intérêts (au 1^{er} janvier 2036) : il vaut $1\,500 \times 1,03$. Le versement de 2036 vient d'être fait : il vaut 1 500 (soit $1\,500 \times 1,03^0$).

Partie B – La valeur acquise par le plan

- 4) Au 1^{er} janvier 2027, les 1 500 € de 2026 sont devenus 1 545 €, puis Soline verse 1 500 € : $V_1 = 1\,545 + 1\,500 = 3\,045$. (1 pt)

Au 1^{er} janvier 2028 : $V_2 = 3\,045 \times 1,03 + 1\,500 = 3\,136,35 + 1\,500 = \boxed{4\,636,35}$.

- 5) Le 1^{er} janvier 2036, le plan contient la valeur de chacun des 11 versements de 2026 à 2036. D'après la partie A, un versement fait j années plus tôt vaut $1\,500 \times 1,03^j$; j va de 0 (versement de 2036) à 10 (versement de 2026). Donc (1,5 pt)

$$V_{10} = 1\,500 + 1\,500 \times 1,03 + \dots + 1\,500 \times 1,03^{10} = \sum_{k=0}^{10} 1\,500 \times 1,03^k.$$

C'est la somme des termes consécutifs $p_0, p_1, \dots, p_{10}$ de la suite géométrique (p_n) : elle compte $10 - 0 + 1 = \boxed{11}$ termes.

- 6) Avec la formule de la somme des termes d'une suite géométrique : (1,5 pt)

$$V_{10} = 1\,500 \times \frac{1 - 1,03^{11}}{1 - 1,03} \approx \boxed{19\,211,69} \text{ €}.$$

Soline aura versé $11 \times 1\,500 = \boxed{16\,500}$ €. La différence $19\,211,69 - 16\,500 = \boxed{2\,711,69}$ € provient des intérêts.

Partie C – L'apport pour la boutique

- 7) Comme à la question 5, au 1^{er} janvier 2026 + n le plan contient les $n + 1$ versements faits de 2026 à 2026 + n : (1 pt)

$$V_n = \sum_{k=0}^n 1\,500 \times 1,03^k = 1\,500 \times \frac{1 - 1,03^{n+1}}{1 - 1,03} = 1\,500 \times \frac{1,03^{n+1} - 1}{0,03} = \boxed{50\,000 \times (1,03^{n+1} - 1)}.$$

- 8) La suite (V_n) est croissante (on ajoute chaque année des intérêts et un versement). À la calculatrice (tableau de valeurs de $50\,000 \times (1,03^{x+1} - 1)$) : (1 pt)

$$V_{12} \approx 23\,426,69 < 25\,000 \quad \text{et} \quad V_{13} \approx 25\,629,49 \geq 25\,000.$$

Le plus petit entier n tel que $V_n \geq 25\,000$ est $n = 13$: Soline disposera de l'apport de 25 000 € pour la première fois le 1^{er} janvier 2026 + 13 = $\boxed{2039}$, après $\boxed{14}$ versements.

- 9) Soline aura versé $14 \times 1\,500 = 21\,000$ €; les intérêts représentent $25\,629,49 - 21\,000 = \boxed{4\,629,49}$ €, soit environ 18 % de la somme disponible. (1 pt)

L'affirmation de Soline est fausse : les intérêts dépassent 4 600 €, l'équivalent de plus de trois années de versements. Comme chaque versement rapporte des intérêts qui rapportent à leur tour des intérêts, leur part grandit d'autant plus que l'épargne dure longtemps : sans eux, il lui faudrait 17 versements au lieu de 14.

Exercice 3 – Additionner des inverses avec Python

5 points

- 1) $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $H_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$. (1 pt)

- 2) a. range(4) fait prendre à k les valeurs 0, 1, 2, 3. Quand k vaut 0, on ajoute $\frac{1}{0+1} = 1$ (premier terme de H_4); quand k vaut 3, on ajoute $\frac{1}{4}$ (dernier terme). Le compteur commence à 0 alors que la somme commence à l'inverse de 1 : écrire $1 / k$ ajouterait d'abord $\frac{1}{0}$, qui n'existe pas (le programme s'arrêterait sur une erreur), et la somme s'arrêterait à $\frac{1}{3}$. (1 pt)

b. (1 pt)

	avant la boucle	1 ^{er} passage	2 ^e	3 ^e	4 ^e
s	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$

($\frac{11}{6} + \frac{1}{4} = \frac{22}{12} + \frac{3}{12} = \frac{25}{12}$.) La fonction renvoie donc $H_4 = \frac{25}{12}$.

- c. L'initialisation est la ligne $s = 0$; s est l'accumulateur (il reçoit un terme de plus à chaque passage); k est le compteur. La boucle est parcourue n fois (k de 0 à $n-1$), puis on en sort et la fonction renvoie la valeur finale de s , c'est-à-dire $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. (1 pt)

- 3) Les termes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ne sont ni ceux d'une suite arithmétique (écarts $-\frac{1}{2}$ puis $-\frac{1}{6}$, non constants) ni ceux d'une suite géométrique (quotients $\frac{1}{2}$ puis $\frac{2}{3}$, non constants). Les formules du cours ne s'appliquent pas : on additionne les termes un à un, ce que fait la boucle. (0,5 pt)

- 4) On remplace la ligne $s = s + 1 / (k + 1)$ par $s = s + (k + 1) ** 3$. (0,5 pt)
L'appel avec $n = 4$ renverrait $1 + 8 + 27 + 64 = \boxed{100}$.