

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 — Raisons, croissances et sommes (vrai ou faux)

5 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : un calcul, une propriété du cours ou un contre-exemple. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1. Les nombres 18; 24; 32 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

Affirmation 2. Les nombres 1,5; 2,25; 3,25 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Affirmation 3. Le prix d'un abonnement à une plateforme de musique augmente de 0,50 € chaque année : ce prix connaît une croissance exponentielle.

Affirmation 4. Si (w_n) est la suite géométrique de premier terme $w_0 = 2\,000$ et de raison 0,9, alors $\sum_{k=0}^9 w_k > 13\,000$.

Exercice 2 — Le plan d'épargne de Soline

10 points

Soline, apprentie fleuriste, rêve de reprendre un jour une boutique; la banque lui demande pour cela un apport personnel de 25 000 €. Le 1^{er} janvier 2026, elle ouvre un plan d'épargne à intérêts composés au taux annuel de 3 % : chaque 1^{er} janvier, la somme présente sur le plan augmente de 3 %. Elle y verse 1 500 € le 1^{er} janvier 2026, puis 1 500 € chaque 1^{er} janvier suivant, juste après l'ajout des intérêts.

Partie A — Ce que devient un seul versement

On suit uniquement les 1 500 € versés le 1^{er} janvier 2026. Pour tout entier naturel n , on note p_n leur valeur, en euros, au 1^{er} janvier de l'année $2026 + n$; ainsi $p_0 = 1\,500$.

- 1) Calculer p_1 et p_2 .
- 2) Déterminer la nature de la suite (p_n) et sa raison, puis exprimer p_n en fonction de n .
- 3) Calculer, au centime près, la valeur au 1^{er} janvier 2036 des 1 500 € versés en 2026. Que vaut à cette même date, en fonction de 1,03, le versement fait le 1^{er} janvier 2035? Celui fait le 1^{er} janvier 2036?

Partie B — La valeur acquise par le plan

Pour tout entier naturel n , on note V_n la somme, en euros, présente sur le plan le 1^{er} janvier de l'année $2026 + n$, juste après le versement de cette année-là. Ainsi $V_0 = 1\,500$.

- 4) Vérifier que $V_1 = 3\,045$, puis calculer V_2 .
- 5) En s'aidant de la partie A, expliquer pourquoi $V_{10} = 1\,500 + 1\,500 \times 1,03 + 1\,500 \times 1,03^2 + \dots + 1\,500 \times 1,03^{10}$. Écrire cette somme avec le symbole Σ et préciser son nombre de termes.
- 6) Calculer V_{10} , arrondi au centime. Quel montant Soline aura-t-elle versé au total à cette date? Quelle part de V_{10} provient des intérêts?

Partie C — L'apport pour la boutique

- 7) Montrer que, pour tout entier naturel n , $V_n = 50\,000 \times (1,03^{n+1} - 1)$.

- 8) À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année au cours de laquelle Soline disposera pour la première fois de l'apport demandé. Combien de versements aura-t-elle effectués ?
- 9) Soline estime que « les intérêts, c'est quelques centaines d'euros, rien de plus ». Calculer, au centime près, le montant des intérêts acquis à la date trouvée à la question 8, et commenter son affirmation en une ou deux phrases.

Exercice 3 – Additionner des inverses avec Python

5 points

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

- 1) Écrire H_n à l'aide du symbole Σ , puis calculer H_3 sous forme d'une fraction.
- 2) On considère la fonction Python suivante.

```
def somme_inverses(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + 1 / (k + 1)
    return s
```

- a. Lors de l'appel `somme_inverses(4)`, quelles valeurs la variable `k` prend-elle successivement ? Quel terme de H_4 est ajouté quand `k` vaut 0 ? quand `k` vaut 3 ? Expliquer pourquoi le programme écrit `1 / (k + 1)` et non `1 / k`.
- b. Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant les valeurs de `s` sous forme de fractions.

	avant la boucle	après le 1 ^{er} passage	après le 2 ^e	après le 3 ^e	après le 4 ^e
s	0				

- c. Dans cette fonction, quelle ligne réalise l'initialisation ? Quelle variable joue le rôle d'accumulateur ? de compteur ? Combien de passages dans la boucle sont effectués avant la sortie, et que renvoie la fonction ?
- 3) L'instruction `print(somme_inverses(10))` affiche 2.9289682539682538. Pourquoi ne peut-on pas obtenir H_{10} par l'une des deux formules de somme du cours ?
- 4) Quelle ligne faut-il modifier pour que la fonction renvoie la somme des cubes $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$? Que renverrait alors l'appel avec $n = 4$?