Exercice 1 (Fonction affine)

On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 2$.

1. **Calcul de l'image de -5 par f :**

   On remplace x par -5 dans l'expression de la fonction :

   $$f(-5) = -3 \times (-5) + 2 = 15 + 2 = 17$$

   L'image de -5 par f est $\boxed{17}$.

2. **Détermination de l'antécédent de 7 par f :**

   On cherche le réel x tel que $f(x) = 7$. On résout l'équation :

   $$\begin{aligned} -3x + 2 &= 7 \\ -3x &= 7 - 2 \\ -3x &= 5 \\ x &= \frac{5}{-3} \end{aligned}$$

   L'antécédent de 7 par f est $\boxed{-\frac{5}{3}}$.

3. **Coefficient directeur et ordonnée à l'origine :**

   La fonction est de la forme $ax + b$ avec $a = -3$ et $b = 2$.

   - Le coefficient directeur est $\boxed{-3}$.
   - L'ordonnée à l'origine est $\boxed{2}$.

Exercice 2 (Fonction carré)

On considère la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $]-\infty\,; +\infty[$.

1. **Calcul des images :**

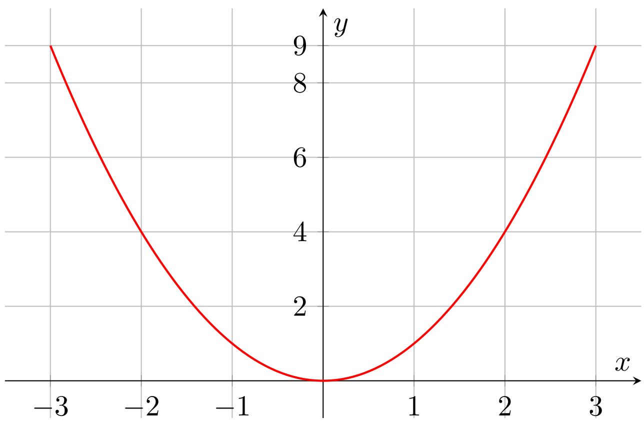
   - Image de -5 : $f(-5) = (-5)^2 = \boxed{25}$.
   - Image de $\frac{\sqrt{3}}{4}$: $f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{4^2} = \boxed{\frac{3}{16}}$.

2. **Tableau de valeurs :**

   On calcule le carré de chaque nombre :

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2	3
$f(x)$	$\mathbf{9}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0,25}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0,25}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{9}$

3. **Représentation graphique sur** $[-3\,;\,3]$ **:**



4. **Nom de la courbe :** Cette courbe s'appelle une $\boxed{\text{parabole}}$.

5. **Résolution graphique :**
   - **Équation** $f(x) = 4$ **:** On trace la droite horizontale $y = 4$. Elle coupe la parabole aux points d'abscisses -2 et 2.
   $$S = \boxed{\{-2\,;\,2\}}$$
   - **Inéquation** $f(x) \geq 1$ **:** On cherche les abscisses des points de la parabole situés au-dessus ou sur la droite $y = 1$. Graphiquement, cela correspond aux intervalles à l'extérieur de -1 et 1.
   $$S = \boxed{]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[}$$

6. **Intervalles pour** $4 \leq x^2 \leq 9$ **:** On cherche les valeurs de x pour lesquelles la fonction carrée est comprise entre 4 et 9 (inclus). Graphiquement, cela correspond à deux zones : entre -3 et -2, et entre 2 et 3.
$$x \in \boxed{[-3\,;\,-2] \cup [2\,;\,3]}$$

Exercice 3 (Fonction cube)

On considère la fonction cube $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

1. **Image de** 5^4 **:**
$$f(5^4) = (5^4)^3 = 5^{4\times 3} = \boxed{5^{12}}$$

2. **Antécédent de 27 :** On cherche x tel que $x^3 = 27$. Or, on sait que $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$. L'antécédent de 27 est donc $\boxed{3}$.

Exercice 4 (Fonction inverse)

On considère la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. **Ensemble de définition :** La fonction inverse est définie pour tout réel non nul.

$$D_f = \mathbb{R}^* \quad \text{ou} \quad \boxed{]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[}$$

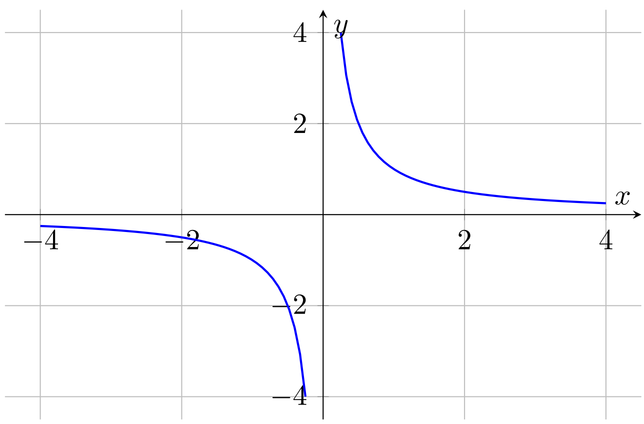
2. **Calcul des images :**
   - Image de $\frac{5}{4}$: $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \boxed{\frac{4}{5}}$.
   - Image de -10^{-3} : $f(-10^{-3}) = \dfrac{1}{-10^{-3}} = -\dfrac{1}{10^{-3}} = -10^3 = \boxed{-1000}$.

3. **Antécédent de 3 :** On résout $\dfrac{1}{x} = 3$.

$$\frac{1}{x} = 3 \iff x = \frac{1}{3}$$

   L'antécédent de 3 est $\boxed{\frac{1}{3}}$.

4. **Représentation graphique sur $[-4\,;\,4]$:**



5. **Nom de la courbe :** Cette courbe s'appelle une $\boxed{\text{hyperbole}}$.

6. **Résolution d'inéquations sur $\mathbb{R}^*$:**

(a) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$:

Pour que l'inverse soit positif, x doit être positif. La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, donc elle inverse l'ordre des nombres :

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2} \iff 0 < x \leq 2$$

(Graphiquement : la courbe est au-dessus de $0,5$ entre 0 et 2).

$$S = \boxed{]0\,;\,2]}$$

(b) $\frac{1}{x} \leq 2$:

Si $x < 0$, $\frac{1}{x}$ est négatif, donc l'inéquation est vérifiée. Si $x > 0$, $\frac{1}{x} \leq 2 \iff x \geq \frac{1}{2}$ (car la fonction inverse est décroissante sur les positifs).

$$S = \boxed{]-\infty\,;\,0[\cup\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[}$$

Exercice 5 (Fonction racine carrée)

On considère la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$.

1. **Ensemble de définition :** La racine carrée est définie pour tout réel positif ou nul.

$$D_f = \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad \boxed{[0\,;\,+\infty[}$$

2. **Image de $\frac{36}{121}$:**

$$f\left(\frac{36}{121}\right) = \sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{121}} = \boxed{\frac{6}{11}}$$

3. **Résolution des inéquations :**

(a) $\sqrt{x} \leq 3$:

La fonction racine carrée est définie sur $[0; +\infty[$ et croissante. On élève au carré (car les deux membres sont positifs) tout en respectant l'ensemble de définition :

$$0 \leq \sqrt{x} \leq 3 \iff 0 \leq x \leq 3^2 \iff 0 \leq x \leq 9$$

$$S = \boxed{[0\,;\,9]}$$

(b) $\sqrt{x} \geq 7$:

On élève au carré :

$$x \geq 7^2 \iff x \geq 49$$

$$S = \boxed{[49\,;\,+\infty[}$$