

Exercice 1 – Les rendez-vous non honorés du centre de santé

6 points

Partie A – Les absences

- 1) $\{X \leq 1\}$: « lors de la demi-journée, au plus un rendez-vous n'est pas honoré » (aucun ou un seul).

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,3 + 0,35 = \boxed{0,65}.$$

- 2) « Au moins deux rendez-vous non honorés » est l'évènement $\{X \geq 2\}$, contraire de $\{X \leq 1\}$:

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,65 = \boxed{0,35} \quad (\text{ou } 0,2 + 0,1 + 0,05).$$

- 3) $E(X) = 0 \times 0,3 + 1 \times 0,35 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,05 = 0 + 0,35 + 0,4 + 0,3 + 0,2 = \boxed{1,25}$.
Interprétation : sur un grand nombre de demi-journées, 1,25 rendez-vous en moyenne ne sont pas honorés par demi-journée, soit environ 5 créneaux perdus toutes les 4 demi-journées.

Partie B – Faut-il surréserver ?

- 4) a. Avec un rendez-vous ajouté, 13 patients sont attendus pour 12 créneaux, et le patient ajouté vient toujours. Si au moins un des 12 patients prévus ne vient pas ($X \geq 1$), il reste un créneau libre et personne n'est en trop. Si les 12 patients prévus viennent tous ($X = 0$), ils sont 13 pour 12 créneaux : un patient est en trop. Donc $Y = 1$ exactement lorsque $X = 0$.

- b. Y ne prend que les valeurs 0 et 1, et $P(Y = 1) = P(X = 0) = 0,3$: Y suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,3.

- 5) Avec deux rendez-vous ajoutés : si $X = 0$, deux patients sont en trop ; si $X = 1$, un seul ; si $X \geq 2$, aucun.

z_i	0	1	2
$P(Z = z_i)$	$P(X \geq 2) = 0,35$	$P(X = 1) = 0,35$	$P(X = 0) = 0,3$

$$E(Z) = 0 \times 0,35 + 1 \times 0,35 + 2 \times 0,3 = \boxed{0,95} \text{ patient en trop en moyenne par demi-journée.}$$

- 6) Avec un rendez-vous ajouté : $P(Y = 1) = 0,3 < 0,5$, la condition est respectée.
Avec deux rendez-vous ajoutés : $P(Z \geq 1) = 0,35 + 0,3 = 0,65 > 0,5$, la condition n'est pas respectée.
Conclusion : la direction peut ajouter **un seul** rendez-vous par demi-journée ; avec deux, il y aurait au moins un patient en trop plus d'une demi-journée sur deux.

Exercice 2 – La roue de l'association d'aide à domicile

3 points

On note B le bénéfice de l'association, en euros, sur une partie : c'est la mise encaissée moins le lot versé.

Secteur obtenu	lot de 24 €	lot de 6 €	aucun lot
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{9}{12}$
B avec une mise de 3 €	$3 - 24 = -21$	$3 - 6 = -3$	3

$$E(B) = -21 \times \frac{1}{12} - 3 \times \frac{2}{12} + 3 \times \frac{9}{12} = \frac{-21 - 6 + 27}{12} = \boxed{0}.$$

Avec une mise de 3 €, l'association ne gagne rien en moyenne (le jeu est équitable) : **le jeu actuel ne lui permet pas** de gagner 50 centimes par partie.

Plus petite mise. Les lots et leurs probabilités ne changent pas : chaque euro ajouté à la mise est encaissé à toutes les parties et ajoute donc exactement 1 € au bénéfice moyen. Il faut gagner 0,50 € de plus en moyenne : on essaie une mise de 3,50 €. B vaut alors $-20,5$, $-2,5$ ou $3,5$, et

$$E(B) = \frac{-20,5 \times 1 - 2,5 \times 2 + 3,5 \times 9}{12} = \frac{-20,5 - 5 + 31,5}{12} = \frac{6}{12} = 0,5.$$

Une mise inférieure à 3,50 € donnerait un bénéfice moyen inférieur à 0,50 €.

Conclusion : la plus petite mise qui convient est $\boxed{3,50 \text{ €}}$; l'association gagne alors en moyenne exactement 50 centimes par partie.

(Variante : avec une mise de m euros, $E(B) = \frac{(m - 24) + 2(m - 6) + 9m}{12} = \frac{12m - 36}{12} = m - 3$, et $m - 3 \geq 0,5 \iff m \geq 3,5$. Une mise supérieure, par exemple 4 €, correctement justifiée mais sans montrer qu'elle est la plus petite, obtient une partie des points.)

Exercice 3 — Le sondage sur la vaccination contre la grippe

4 points

- 1) Les deux diagrammes sont centrés autour de $p = 0,55$, mais celui du document 2 est beaucoup plus resserré : les fréquences fluctuent moins avec des échantillons plus grands. La taille des échantillons a été **multipliée par 4** ($100 \rightarrow 400$) et l'écart-type a été **divisé par 2** ($0,050 \rightarrow 0,025$). C'est cohérent avec un écart-type de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, puisque $\sqrt{4} = 2$.

- 2) Document 1 : $2s = 0,10$, l'intervalle est $\boxed{[0,45; 0,65]}$.
Document 2 : $2s = 0,05$, l'intervalle est $\boxed{[0,50; 0,60]}$.

- 3) Les deux sondages donnent la fréquence $\frac{47}{100} = \frac{188}{400} = 0,47$, à une distance $0,55 - 0,47 = 0,08$ de p .

- *Sondage A* (100 personnes, document 1) : $0,08 < 2s = 0,10$, donc $0,47 \in [0,45; 0,65]$, intervalle qui contient 94,25 % des échantillons simulés. C'est une **situation fréquente** : ce sondage ne remet pas en cause l'estimation de 55 %.
- *Sondage B* (400 personnes, document 2) : $0,08 > 3s = 0,075$, donc $0,47$ est même en dehors de $[p - 3s; p + 3s] = [0,475; 0,625]$, qui contient 99,75 % des échantillons ; sur le diagramme, aucun échantillon n'a une fréquence inférieure à 0,48. C'est une **situation rare** : ce sondage amène à douter de l'estimation de 55 %.

La même fréquence n'a donc pas la même signification selon la taille de l'échantillon.

Exercice 4 — Ce que Lina conclut du sondage

3 points

Phrase (1) Incorrecte. Lina oublie la fluctuation d'échantillonnage : même si 55 % des personnes sont vaccinées, la fréquence observée sur 100 personnes varie d'un échantillon à l'autre et n'est presque jamais exactement 0,55. Ici, 0,47 est dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s] = [0,45; 0,65]$ du document 1.

Rédaction correcte : « Dans le sondage A, la fréquence 0,47 est à une distance 0,08 de 0,55, inférieure à $2s = 0,10$: pour des échantillons de 100 personnes, c'est une situation fréquente, et ce sondage ne permet pas de dire que l'estimation de l'agence est fausse. »

Phrase (2) Correcte. Dans le document 2, $[p - 2s; p + 2s] = [0,50; 0,60]$ et cet intervalle contient 95,5 % des échantillons, soit environ 95 %.

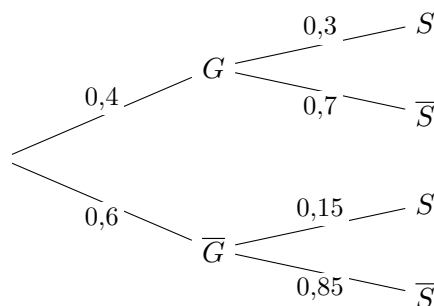
Phrase (3) Incorrecte. L'écart-type des fréquences est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$: pour le diviser par 2, il faut multiplier la taille des échantillons par $2^2 = 4$, comme entre les documents 1 et 2.

Rédaction correcte : « Pour obtenir un écart-type deux fois plus petit, il faut interroger quatre fois plus de personnes. »

Exercice 5 — Les stages à l'étranger d'une école d'arts appliqués

4 points

1) Arbre pondéré ($P(\overline{G}) = 1 - 0,4 = 0,6$, compléments à 1 au second niveau) :



2) $P(G \cap S) = 0,4 \times 0,3 = \boxed{0,12}$.

D'après la formule des probabilités totales (G et $\overline{G}$ forment deux cas qui s'excluent et couvrent tous les étudiants) : $P(S) = P(G \cap S) + P(\overline{G} \cap S) = 0,12 + 0,6 \times 0,15 = 0,12 + 0,09 = \boxed{0,21}$.

3) $P_S(G) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,21} = \frac{12}{21} = \boxed{\frac{4}{7}}$.

4) $P(G) = 0,4 \neq 0$ et $P_G(S) = 0,3$ alors que $P(S) = 0,21$: $P_G(S) \neq P(S)$, donc

G et S ne sont pas indépendants.

Dans le contexte : savoir qu'un étudiant suit l'option graphisme change la probabilité qu'il parte en stage à l'étranger ; les étudiants de graphisme partent plus souvent (30 %) que l'ensemble des étudiants (21 %).