

Exercice 1 — Le prix des places au Théâtre du Pontil

6 points

- 1) La somme des probabilités de la loi vaut 1 : $a = 1 - 0,25 - 0,35 = \boxed{0,4}$.
- 2) $\{X \leq 18\}$: « le spectateur a payé sa place 18 € ou moins », c'est-à-dire au tarif abonné ou au tarif réduit.

$$P(X \leq 18) = P(X = 12) + P(X = 18) = 0,25 + 0,35 = \boxed{0,6}.$$

- 3) $E(X) = 12 \times 0,25 + 18 \times 0,35 + 25 \times 0,4 = 3 + 6,3 + 10 = \boxed{19,3}$.
Interprétation : sur un grand nombre de spectateurs, une place rapporte en moyenne 19,30 € à la compagnie.

- 4) Salle pleine : recette moyenne $450 \times 19,3 = 8\,685$ €, inférieure à 9 000 € : **ce n'est pas le cas**.

Il faudrait une recette moyenne par place de $\frac{9\,000}{450} = 20$ €. En notant t le plein tarif :

$$12 \times 0,25 + 18 \times 0,35 + t \times 0,4 = 20 \iff 9,3 + 0,4t = 20 \iff t = \frac{10,7}{0,4} = 26,75.$$

Il faudrait fixer le plein tarif à $\boxed{26,75 \text{ €}}$ (au moins).

Exercice 2 — Les abonnés se réabonnent-ils ?

8 points

Question 1 — 3 points

- a. À chaque tour de boucle, `random() < p` est vrai avec la probabilité p : c'est un abonné simulé qui se réabonne. `nb` compte donc **le nombre d'abonnés qui se réabonnent** parmi les n abonnés simulés (le nombre de succès).
`echantillon(100, 0.7)` renvoie `nb / 100` : **la fréquence de réabonnement observée dans un échantillon simulé de 100 abonnés**, pour $p = 0,7$.
- b. Ligne complétée : `if p - k * s <= f <= p + k * s :`
(ou, de façon équivalente, `if f >= p - k * s and f <= p + k * s :`).

Question 2 — 5 points

- a. 0,045 est la valeur de s arrondie au millième : **l'écart-type de la série des 500 fréquences simulées**.
 $p - 2s = 0,7 - 0,09 = 0,61$ et $p + 2s = 0,79$: l'intervalle est $\boxed{[0,61; 0,79]}$.
- b. D'après l'énoncé, 479 des 500 fréquences simulées sont situées dans $[p - 2s; p + 2s] : \frac{479}{500} = 0,958$, soit $\boxed{95,8 \%}$ des échantillons.
- c. La barre placée en 0,76 atteint la graduation 25 : $\boxed{25 \text{ échantillons}}$. (Lecture graphique : toute réponse entre 24 et 26 est acceptée.)
- d. La fréquence observée est 0,58 ; sa distance à p vaut $0,7 - 0,58 = 0,12$, plus grande que $2s = 0,09$:

0,58 est en dehors de l'intervalle $[0,61; 0,79]$, qui contient 95,8 % des échantillons simulés. Sur le diagramme, seuls 3 échantillons simulés sur 500 (soit 0,6 %) ont une fréquence égale à 0,58, et aucun n'a une fréquence plus faible.

Conclusion : si 70 % des abonnés se réabonnaient vraiment, observer seulement 58 réabonnements sur 100 serait une **situation rare**; ce résultat amène à douter du taux de 70 % annoncé par la compagnie (sans pouvoir affirmer qu'il est faux).

Exercice 3 — Ce que l'on sait des abonnés

6 points

Affirmation 1. Vrai. Y ne prend que les valeurs 0 et 1, avec $P(Y = 1) = 0,7$ (l'abonné se réabonne) et $P(Y = 0) = 0,3$: c'est une loi de Bernoulli de paramètre 0,7.

Affirmation 2. Vrai. Le premier nombre affiché par le programme, 334, compte les fréquences situées dans $[p - s; p + s]$: $\frac{334}{500} = 0,668$, soit 66,8 %, environ deux échantillons sur trois.

Affirmation 3. Faux. L'écart-type des fréquences observées est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$: pour le diviser par 2, il faut **multiplier la taille des échantillons par 4** (car $\sqrt{4n} = 2\sqrt{n}$). En doublant seulement la taille, on divise l'écart-type par $\sqrt{2} \approx 1,41$, pas par 2.