

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 – Le prix des places au Théâtre du Pontil

6 points

La compagnie du Théâtre du Pontil joue dans une salle de 450 places. Une place coûte 25 € au plein tarif, 18 € au tarif abonné et 12 € au tarif réduit. On choisit un spectateur au hasard et on note X le prix, en euros, qu'il a payé. D'après la billetterie de la saison passée, la loi de X est la suivante.

x_i (en €)	12	18	25
$P(X = x_i)$	0,25	0,35	a

- 1) Déterminer la valeur de a .
- 2) Décrire par une phrase l'évènement $\{X \leq 18\}$, puis calculer sa probabilité.
- 3) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'interpréter dans le contexte.
- 4) Les soirs où la salle est pleine, la compagnie veut une recette moyenne d'au moins 9 000 €. Est-ce le cas ? Sinon, à combien faudrait-il fixer le plein tarif, les autres tarifs et la loi restant inchangés ? Arrondir au centime.

Exercice 2 – Les abonnés se réabonnent-ils ?

8 points

La compagnie annonce que 70 % de ses abonnés se réabonnent d'une saison à l'autre. On modélise le choix d'un abonné tiré au hasard par une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$ (succès : « l'abonné se réabonne »). Pour étudier la fluctuation d'échantillonnage, on simule $N = 500$ échantillons de taille $n = 100$ à l'aide du programme ci-dessous (`random()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0; 1[$; `ecart_type(liste)` renvoie l'écart-type d'une liste de nombres).

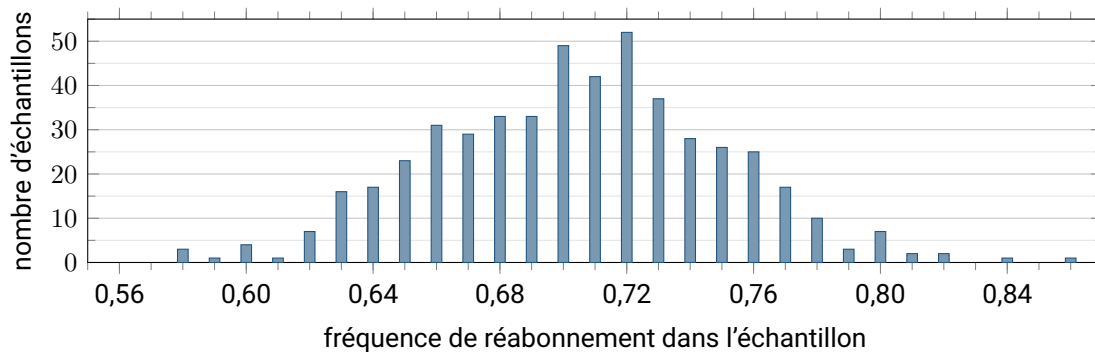
```
from random import random
def echantillon(n, p):
    nb = 0
    for k in range(n):
        if random() < p:
            nb = nb + 1
    return nb / n
def compte(freqs, p, s, k):
    c = 0
    for f in freqs:
        if ..... :
            c = c + 1
    return c
N = 500
freqs = []
for i in range(N):
    freqs.append(echantillon(100, 0.7))
s = ecart_type(freqs)
print(round(s, 3))
print(compte(freqs, 0.7, s, 1), compte(freqs, 0.7, s, 2), compte(freqs, 0.7, s, 3))
```

Question 1 – 3 points

- a. Que compte la variable `nb` dans la fonction `echantillon` ?
Que renvoie l'appel `echantillon(100, 0.7)` ?

- b. La fonction `compte` doit renvoyer le nombre de fréquences de la liste `freqs` situées dans l'intervalle $[p - ks; p + ks]$. Recopier et compléter la ligne en pointillés.

Question 2 – 5 points Le programme complété affiche 0.045 sur une première ligne, puis 334 479 498 sur une seconde : parmi les 500 fréquences simulées, 334 sont situées dans l'intervalle $[p - s; p + s]$, 479 dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$ et 498 dans l'intervalle $[p - 3s; p + 3s]$. Le diagramme ci-dessous donne la répartition des 500 fréquences simulées.



- Que représente le nombre 0,045 affiché ? En déduire l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$.
- Quel pourcentage des échantillons simulés a une fréquence située dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$?
- Lire sur le diagramme le nombre d'échantillons dont la fréquence est égale à 0,76.
- Cette saison, sur 100 abonnés tirés au sort, 58 se sont réabonnés. Si l'annonce de la compagnie est exacte, ce résultat est-il une situation fréquente ou une situation rare ? Répondre par une phrase argumentée, en s'appuyant sur le diagramme et sur l'intervalle de la question a.

Exercice 3 – Ce que l'on sait des abonnés

6 points

Vrai ou faux ? Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

- Affirmation 1.** On choisit un abonné au hasard et on note $Y = 1$ s'il se réabonne, $Y = 0$ sinon. La variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,7.
- Affirmation 2.** Dans la simulation de l'exercice 2, environ deux échantillons sur trois ont une fréquence située à une distance au plus s de p .
- Affirmation 3.** Pour diviser par 2 l'écart-type des fréquences observées, il suffit de doubler la taille des échantillons.