

Exercice 1 – Le sucre d'un soda

8 points

- 1) Les six points du nuage sont presque alignés : la masse volumique augmente d'environ 10 g/L chaque fois que la concentration augmente de 25 g/L. Une droite passe très près de tous les points : un ajustement affine est adapté.

$$2) \bar{c} = \frac{0 + 25 + 50 + 75 + 100 + 125}{6} = \frac{375}{6} = 62,5;$$

$$\bar{\rho} = \frac{998,2 + 1\,008,0 + 1\,017,4 + 1\,027,3 + 1\,036,6 + 1\,046,5}{6} = \frac{6\,134}{6} \approx 1\,022,33.$$

$$G(62,5; 1\,022,33).$$

- 3) La calculatrice (régression linéaire) donne $a \approx 0,385\,37$ et $b \approx 998,248$, soit, avec les arrondis demandés :

$$\rho = 0,385\,c + 998,2.$$

- 4) On résout $0,385\,c + 998,2 = 1\,039,4$:

$$0,385\,c = 41,2 \iff c = \frac{41,2}{0,385} \approx 107,01.$$

La teneur en sucre du soda est estimée à environ 107 g/L .

- 5) L'écart avec l'étiquette est de 1 g/L sur 106, soit moins de 1 % : le résultat est cohérent.

Une canette contient $106 \times 0,33 = 34,98\text{ g}$ de sucre, et $34,98 \div 5 \approx 7$.

La mesure confirme l'étiquette : une canette de 33 cL contient environ 35 g de sucre, soit à peu près 7 morceaux de sucre.

- 6) 1 320 g/L est très au-delà des masses volumiques des solutions étalons (de 998,2 à 1 046,5 g/L) : la teneur annoncée, environ 836 g/L, correspond à une concentration près de sept fois plus grande que la plus forte solution mesurée (125 g/L).

C'est une extrapolation très lointaine : rien ne garantit que la relation reste affine pour des solutions aussi concentrées, donc le résultat du stagiaire n'est pas fiable.

- 7) Pour la solution diluée : $0,385\,c = 1\,031,4 - 998,2 = 33,2$, donc $c = \frac{33,2}{0,385} \approx 86,23\text{ g/L}$.

Le sirop pur est dix fois plus concentré : $10 \times 86,23 \approx 862,3$, soit 860 g/L environ (arrondi à la dizaine). L'extrapolation du stagiaire (836 g/L) sous-estimait donc la teneur d'environ 25 g/L.

Cette méthode est plus fiable car la masse volumique de la solution diluée se trouve dans le domaine des solutions étalons : on fait une interpolation, et non une extrapolation.

Exercice 2 – Mesurer l'écart à une droite

3 points

- 1) Valeurs de la droite $0,4c_i + 998$: 998 ; 1 008 ; 1 018 ; 1 028 ; 1 038 ; 1 048.

c_i	0	25	50	75	100	125
écart $\rho_i - (0,4c_i + 998)$	0,2	0	-0,6	-0,7	-1,4	-1,5
carré de l'écart	0,04	0	0,36	0,49	1,96	2,25

$$S = 0,04 + 0 + 0,36 + 0,49 + 1,96 + 2,25 = \boxed{5,1}.$$

- 2) Pour la droite $\rho = 0,4c + 998$, la somme des carrés des écarts vaut 5,1; pour la droite $\rho = 0,385c + 998,2$, elle vaut environ 0,12. Comme $0,12 < 5,1$, au sens des moindres carrés, la droite d'équation $\rho = 0,385c + 998,2$ (celle des moindres carrés, arrondie) ajuste beaucoup mieux le nuage.

Exercice 3 – Ordinateurs reconditionnés

4 points

Une démarche possible.

Ajustement. Les points $(x_i; y_i)$ sont presque alignés : le prix baisse d'environ 80 à 90 € par an. La calculatrice donne la droite des moindres carrés $y \approx -83,1x + 722,7$ (coefficients arrondis au dixième). Le point moyen est $G(3,5; 431,67)$ environ.

Ordinateur de trois ans et demi. 3,5 ans est à l'intérieur des âges observés (de 1 à 6 ans) : on interpole.

$$-83,1 \times 3,5 + 722,7 = 431,85,$$

soit environ $\boxed{432 \text{ €}}$ (c'est aussi l'ordonnée du point moyen, puisque $3,5 = \bar{x}$).

Ordinateur de neuf ans. 9 ans est hors des âges observés : on extrapole.

$$-83,1 \times 9 + 722,7 = -25,2.$$

Le modèle donne un prix **négatif**, ce qui n'a aucun sens : la droite coupe l'axe des abscisses vers 8,7 ans. L'ajustement affine ne peut pas servir au-delà des données.

Réponse au responsable : l'ordinateur de trois ans et demi peut être revendu environ 432 €. Pour celui de neuf ans, les données ne permettent pas de fixer un prix : le modèle affine, prolongé au-delà de six ans, donne une valeur négative; en réalité le prix d'un vieil ordinateur ne descend pas sous zéro et se stabilise sans doute à une petite valeur, qu'il faudra estimer autrement (état de l'appareil, valeur des pièces).

Éléments de barème : ajustement justifié (calculatrice, Mayer ou point moyen et pente acceptés); prévision à 3,5 ans; calcul à 9 ans et constat de l'absurdité; distinction interpolation / extrapolation rédigée.

Exercice 4 – La meilleure droite par le point moyen (dérivation)

5 points

$$1) \bar{x} = \frac{0+1+2}{3} = 1 \text{ et } \bar{y} = \frac{1+3+2}{3} = 2 : \boxed{G(1; 2)}.$$

- 2) La droite a pour équation $y = ax + b$ et passe par $G(1; 2)$, donc $2 = a \times 1 + b$, c'est-à-dire $b = 2 - a$:

$$y = ax + 2 - a.$$

3) Ordonnées de la droite et écarts :

- en $x = 0 : y = 2 - a$; écart pour $A : 1 - (2 - a) = a - 1$;
- en $x = 1 : y = a + 2 - a = 2$; écart pour $B : 3 - 2 = 1$;
- en $x = 2 : y = 2a + 2 - a = a + 2$; écart pour $C : 2 - (a + 2) = -a$.

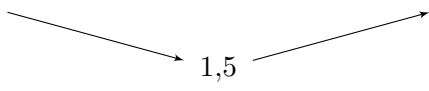
Donc $S(a) = (a - 1)^2 + 1^2 + (-a)^2 = (a - 1)^2 + 1 + a^2$, et en développant :

$$S(a) = a^2 - 2a + 1 + 1 + a^2 = 2a^2 - 2a + 2.$$

4) $S'(a) = 2 \times 2a - 2 = 4a - 2$.

$$4a - 2 > 0 \iff a > 0,5 : S'(a) < 0 \text{ sur }] -\infty ; 0,5[, S'(0,5) = 0, S'(a) > 0 \text{ sur }]0,5 ; +\infty[.$$

$$S(0,5) = 2 \times 0,25 - 1 + 2 = 1,5.$$

a	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
$S'(a)$	$-$	0	$+$
S			

5) S admet un minimum, égal à 1,5, pour $a = 0,5$. La droite cherchée a pour coefficient directeur 0,5 et pour ordonnée à l'origine $2 - 0,5 = 1,5$:

$$y = 0,5x + 1,5.$$

La régression linéaire de la calculatrice sur les points $(0 ; 1)$, $(1 ; 3)$, $(2 ; 2)$ donne $a = 0,5$ et $b = 1,5$: c'est la même droite.

Parmi toutes les droites passant par le point moyen, celle qui rend la somme des carrés des écarts la plus petite est $y = 0,5x + 1,5$: c'est exactement la droite des moindres carrés fournie par la calculatrice.