

Calculatrice autorisée (mode examen)

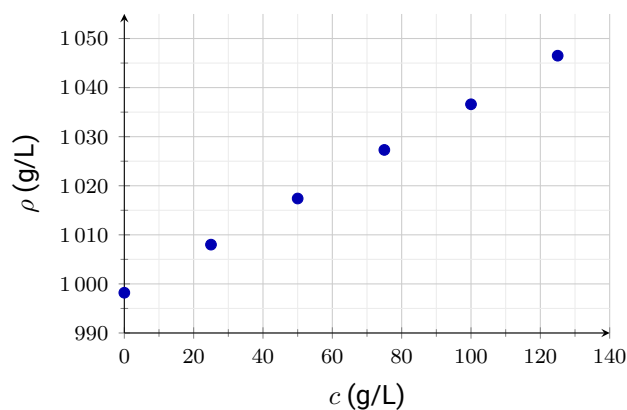
Exercice 1 – Le sucre d'un soda

8 points

Dans le laboratoire d'une association de consommateurs, on estime la teneur en sucre d'une boisson à partir de sa masse volumique. On prépare d'abord six solutions de sucre dans l'eau, de concentrations connues c_i (en g/L), dont on mesure la masse volumique ρ_i (en g/L) à 20 °C.

Concentration c_i (g/L)	0	25	50	75	100	125
Masse volumique ρ_i (g/L)	998,2	1 008,0	1 017,4	1 027,3	1 036,6	1 046,5

- 1) Le nuage de points $(c_i; \rho_i)$ est représenté ci-contre. Expliquer pourquoi un ajustement affine paraît adapté.
- 2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage. Arrondir au centième.
- 3) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de ρ en c obtenue par la méthode des moindres carrés. Arrondir le coefficient directeur au millième et l'ordonnée à l'origine au dixième.



Dans la suite, on utilise la droite d'équation $\rho = 0,385c + 998,2$.

- 4) La masse volumique d'un soda, dégazé et ramené à 20 °C, est de 1 039,4 g/L. Estimer sa teneur en sucre. Arrondir à l'unité.
- 5) L'étiquette de la canette, de 33 cL, annonce 106 g de sucre par litre. Le résultat de la question 4 est-il cohérent avec l'étiquette? Combien de morceaux de sucre de 5 g la canette contient-elle environ? Répondre par une phrase.
- 6) La masse volumique d'un sirop de grenadine pur est de 1 320 g/L. Un stagiaire utilise la droite et annonce une teneur d'environ 836 g/L. Expliquer pourquoi ce résultat n'est pas fiable.
- 7) Le technicien dilue le sirop dix fois (un volume de sirop pour neuf volumes d'eau) : la concentration en sucre est alors divisée par 10. La solution diluée a une masse volumique de 1 031,4 g/L. Estimer la teneur en sucre du sirop pur, arrondie à la dizaine, puis expliquer en une phrase pourquoi cette méthode est plus fiable.

Exercice 2 – Mesurer l'écart à une droite

3 points

On reprend les données de l'exercice 1. Pour mesurer la qualité de l'ajustement du nuage par une droite d'équation $\rho = ac + b$, on calcule la somme S des carrés des écarts $\rho_i - (ac_i + b)$, pour les six points du nuage.

- 1) On considère la droite d'équation $\rho = 0,4c + 998$. Calculer, pour chacun des six points du nuage, l'écart $\rho_i - (0,4c_i + 998)$, puis la somme S des carrés de ces écarts.
- 2) Pour la droite d'équation $\rho = 0,385c + 998,2$, cette somme vaut environ 0,12. Laquelle des deux droites ajuste le mieux le nuage, au sens des moindres carrés ? Justifier.

Exercice 3 – Ordinateurs reconditionnés

4 points

Une boutique revend des ordinateurs portables reconditionnés. Pour un même modèle, elle a relevé le prix de revente moyen selon l'âge de l'ordinateur.

Âge x_i (années)	1	2	3	4	5	6
Prix de revente y_i (€)	640	560	470	390	300	230

Question ouverte. Deux clients se présentent le même jour : le premier apporte un ordinateur de ce modèle âgé de trois ans et demi, le second un ordinateur du même modèle âgé de neuf ans. Le responsable veut savoir à quel prix il pourra revendre chacun d'eux.

En exploitant les données, quelle réponse peut-on lui apporter pour chacun des deux ordinateurs ? Les calculs seront arrondis à l'euro et la réponse sera rédigée. *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*

Exercice 4 – La meilleure droite par le point moyen (dérivation)

5 points

On considère le nuage formé des trois points $A(0; 1)$, $B(1; 3)$ et $C(2; 2)$. On cherche, parmi toutes les droites passant par le point moyen G du nuage, celle qui rend minimale la somme des carrés des écarts.

- 1) Calculer les coordonnées du point moyen G .
- 2) Soit a un nombre réel. Justifier que la droite de coefficient directeur a passant par G a pour équation $y = ax + 2 - a$.
- 3) Pour cette droite, on note $S(a)$ la somme des carrés des écarts entre les ordonnées des points A, B, C et les ordonnées des points de la droite de mêmes abscisses. Montrer que

$$S(a) = (a - 1)^2 + 1 + a^2, \quad \text{puis que} \quad S(a) = 2a^2 - 2a + 2.$$

- 4) On considère la fonction S définie sur $\mathbb{R}$ par $S(a) = 2a^2 - 2a + 2$. Calculer $S'(a)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de S .
- 5) En déduire l'équation de la droite cherchée. Vérifier à la calculatrice qu'il s'agit de la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés, puis conclure par une phrase.