

Exercice 1 – Une courbe, deux tangentes (vrai ou faux)

8 points

Affirmation 1. Vraie. $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente en $A(0; 1)$. Sur la figure, cette tangente passe aussi par le point $(1; -2)$: (2 pts)

$$f'(0) = \frac{-2 - 1}{1 - 0} = -3.$$

Affirmation 2. Fausse. Les points $D(-1; 3)$ et $B(1; -1)$ sont sur la courbe, donc $f(-1) = 3$ et $f(1) = -1$: (2 pts)

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \neq -1.$$

Le taux de variation de f entre -1 et 1 (coefficient directeur de la sécante (DB)) vaut -2 .

Affirmation 3. Fausse. Contre-exemple : la fonction cube $c(x) = x^3$. On a $c'(x) = 3x^2$, donc $c'(0) = 0$: la tangente en $O(0; 0)$ est parallèle à l'axe des abscisses (c'est l'axe lui-même). Pourtant $c'(x) = 3x^2 \geq 0$: la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ ($c(-1) = -1 < 0 = c(0) < 1 = c(1)$), elle n'admet ni maximum ni minimum en 0 . (2 pts)

Une tangente horizontale ne suffit pas : il faut que la dérivée **change de signe** en ce point.

Affirmation 4. Vraie. $f'(x) = 3x^2 - 3$, donc $f'(2) = 12 - 3 = 9$ et $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$. La tangente au point d'abscisse 2 a pour équation (2 pts)

$$y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15.$$

Pour $x = 3$: $9 \times 3 - 15 = 27 - 15 = 12$. Le point $E(3; 12)$ appartient bien à cette tangente.

Exercice 2 – Maximum sur un intervalle fermé

5 points

1) $g'(x) = 2 \times 3x^2 - 9 \times 2x + 12 = \boxed{6x^2 - 18x + 12}$. (1,5 pt)

En développant : $6(x-1)(x-2) = 6(x^2 - 2x - x + 2) = 6(x^2 - 3x + 2) = 6x^2 - 18x + 12 = g'(x)$.

2) $x - 1$ s'annule en 1 et $x - 2$ s'annule en 2; $6 > 0$. (2,5 pts)

$g(0) = -1$; $g(1) = 2 - 9 + 12 - 1 = 4$; $g(2) = 16 - 36 + 24 - 1 = 3$; $g(3) = 54 - 81 + 36 - 1 = 8$.

x	0	1	2	3
$x - 1$	—	0	+	+
$x - 2$	—	—	0	+
$g'(x)$	+	0	—	+
g	—1	4	3	8

- 3) Le tableau montre deux candidats au maximum : $g(1) = 4$ (maximum local) et $g(3) = 8$ (valeur à la borne). Comme $8 > 4$, le maximum de g sur $[0; 3]$ est $\boxed{8}$, atteint pour $\boxed{x = 3}$. (1 pt)

Le point où g' s'annule ne donne ici qu'un maximum *local* : sur un intervalle fermé, il faut aussi comparer avec les valeurs aux bornes.

Exercice 3 — Un été au camping

7 points

- 1) $N(0) = 20$ et $N(12) = -0,5 \times 1\,728 + 6 \times 144 + 20 = -864 + 864 + 20 = 20$. (1,5 pt)

À l'ouverture du camping, comme au bout de 12 semaines, juste avant la fermeture, 20 emplacements sont occupés.

- 2) $N'(t) = -0,5 \times 3t^2 + 6 \times 2t = \boxed{-1,5t^2 + 12t}$. (1,5 pt)

En développant : $-1,5t(t - 8) = -1,5t^2 + 12t = N'(t)$.

- 3) Sur $[0; 12]$, $-1,5t \leq 0$ (nul seulement en 0); $t - 8$ est négatif avant 8 et positif après. Donc $N'(t) \geq 0$ sur $[0; 8]$ et $N'(t) \leq 0$ sur $[8; 12]$. (2 pts)

$$N(8) = -0,5 \times 512 + 6 \times 64 + 20 = -256 + 384 + 20 = 148.$$

t	0	8	12
$-1,5t$	0	—	—
$t - 8$	—	0	+
$N'(t)$	0	+	—
N	20	148	20

- 4) Le maximum de N sur $[0; 12]$ est atteint pour $t = 8$ et vaut 148. (1 pt)

L'occupation est maximale au bout de $\boxed{8 \text{ semaines}}$ (vers la mi-août), avec 148 emplacements occupés : le camping n'est pas tout à fait complet, il reste 2 emplacements libres sur 150.

- 5) $N'(2) = -1,5 \times 4 + 12 \times 2 = -6 + 24 = \boxed{18}$. (1 pt)

Au bout de deux semaines, le nombre d'emplacements occupés augmente au rythme d'environ 18 emplacements par semaine.