

Exercice 1 – Dérivées en rafale (réponses courtes)

5 points

Réponses attendues (aucune justification n'était demandée; les calculs sont donnés pour la relecture).

1) $f'(x) = 3x^2 - 4$. (1 pt)

2) $g'(x) = -4x + 5$. (1 pt)

3) $h'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2x = x^2 - 2x$, donc $h'(2) = 4 - 4 = 0$. (1 pt)

4) $k'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente : $\frac{-1-3}{3-1} = \frac{-4}{2}$, donc $k'(1) = -2$. (1 pt)

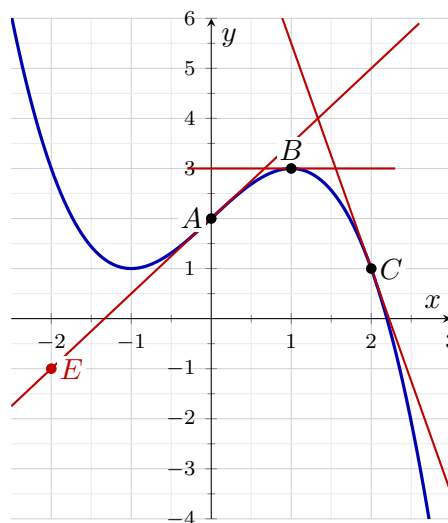
5) Sur $[1; 5]$, $x - 1 \geq 0$ et $x - 5 \leq 0$, donc $m'(x) \leq 0$: la fonction m est décroissante. (1 pt)

Exercice 2 – Trois tangentes à construire

4 points

1) Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente. (2 pts)

- En $A(0; 2)$, coefficient 1,5 : depuis A , on avance de 2 et on monte de 3; la tangente passe par $(2; 5)$.
- En $B(1; 3)$, $f'(1) = 0$: tangente horizontale $y = 3$.
- En $C(2; 1)$, coefficient $-4,5$: depuis C , on recule de 1 et on monte de 4,5; la tangente passe par $(1; 5,5)$ (et par $(3; -3,5)$).



2) La tangente en A a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = 1,5x + 2$. (1 pt)

3) Pour $x = -2$: $1,5 \times (-2) + 2 = -3 + 2 = -1$, qui est bien l'ordonnée de E . **Oui**, le point $E(-2; -1)$ appartient à la tangente en A (on le vérifie aussi sur la figure). (1 pt)

Exercice 3 – La tangente de Noé (copie d'élève)

5 points

1) Noé a dérivé $-2x^2$ en $-2x$: il a oublié de multiplier par l'exposant. La dérivée de x^2 est $2x$, donc celle de $-2x^2$ est $-2 \times 2x = -4x$ (et la constante 5 a une dérivée nulle) : (1,5 pt)

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \quad \text{et} \quad f'(2) = 3 \times 4 - 4 \times 2 = 4.$$

- 2) Noé a échangé les rôles de $f(a)$ et de $f'(a)$. La formule correcte est (1 pt)

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) :$$

c'est le **nombre dérivé** $f'(a)$ (le coefficient directeur) qui multiplie $(x - a)$, et l'image $f(a)$ qui s'ajoute.

- 3) $f(2) = 5$ (calcul de Noé correct) et $f'(2) = 4$: (1,5 pt)

$$y = 4(x - 2) + 5 = 4x - 8 + 5, \quad \text{soit } \boxed{y = 4x - 3}.$$

- 4) La tangente au point A passe par le point $A(2; f(2))$, c'est-à-dire $A(2; 5)$. Pour $x = 2$, l'équation de Noé donne $y = 5 \times 2 - 2 = 8 \neq 5$. (1 pt)

La droite trouvée par Noé ne passe pas par le point A ; elle ne peut donc pas être la tangente en A , et Noé aurait dû comprendre qu'il s'était trompé. (Avec l'équation corrigée : $4 \times 2 - 3 = 5$.)

Exercice 4 — La traversée de la scène

6 points

- 1) $d(0) = 0$ et $d(4) = -0,25 \times 64 + 1,5 \times 16 = -16 + 24 = \boxed{8}$. (1 pt)

La danseuse part de la coulisse gauche et atteint la coulisse droite après 8 mètres : la scène mesure 8 m de large.

- 2) Sur toute la traversée : $\frac{d(4) - d(0)}{4 - 0} = \frac{8}{4} = \boxed{2 \text{ m/s}}$. (1,5 pt)

$d(1) = -0,25 + 1,5 = 1,25$ et $d(3) = -0,25 \times 27 + 1,5 \times 9 = -6,75 + 13,5 = 6,75$, donc entre $t = 1$ et $t = 3$:

$$\frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{6,75 - 1,25}{2} = \frac{5,5}{2} = \boxed{2,75 \text{ m/s}}.$$

- 3) Les taux se rapprochent de $\boxed{3}$ quand h devient très petit : les sécantes se rapprochent de la tangente au point d'abscisse 2, dont le coefficient directeur est $d'(2) = 3$. (1 pt)

Cette valeur est la vitesse instantanée de la danseuse à l'instant $t = 2$: à ce moment précis, elle se déplace à 3 m/s.

- 4) Une démarche possible. $d'(t) = -0,25 \times 3t^2 + 1,5 \times 2t = -0,75t^2 + 3t = -0,75t(t - 4)$. (2,5 pts)

Mi-parcours. $d(2) = -0,25 \times 8 + 1,5 \times 4 = -2 + 6 = 4$: à $t = 2$, la danseuse est à 4 m, à mi-parcours des 8 m de la scène (et à la moitié des 4 s).

La vitesse maximale. La vitesse $v(t) = d'(t) = -0,75t(t - 4)$ est un polynôme de degré 2 :

- ses racines sont 0 et 4;
- son coefficient de t^2 est $-0,75 < 0$: sa courbe est une parabole tournée vers le bas;
- par symétrie, le sommet de la parabole a pour abscisse le milieu des racines, $\frac{0 + 4}{2} = 2$.

La vitesse est donc croissante sur $[0; 2]$, décroissante sur $[2; 4]$: elle est maximale à $t = 2$, et $v(2) = -0,75 \times 2 \times (2 - 4) = 3 \text{ m/s}$.

(En variante, on accepte l'étude du signe de la dérivée de v .)

La chorégraphe a raison : la danseuse va le plus vite à mi-parcours, à $t = 2 \text{ s}$, et sa vitesse ne dépasse jamais 3 m/s, valeur atteinte uniquement à cet instant.