

Exercice 1 – Deux tangentes horizontales

4 points

- 1) f est un polynôme de degré 3 : $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$ et la dérivée d'une constante est nulle. (1,5 pt)

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 12 = \boxed{6x^2 - 6x - 12}.$$

En développant : $6(x-2)(x+1) = 6(x^2 + x - 2x - 2) = 6(x^2 - x - 2) = 6x^2 - 6x - 12 = f'(x)$.

- 2) $f'(-1) = 6(-1-2)(-1+1) = 6 \times (-3) \times 0 = \boxed{0}$ et $f'(2) = 6(2-2)(2+1) = \boxed{0}$. (1,5 pt)

Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente : aux points d'abscisses -1 et 2 , les tangentes à $\mathcal{C}_f$ ont un coefficient directeur nul, elles sont donc **parallèles à l'axe des abscisses** (horizontales).

- 3) $f(0) = 5$ et $f'(0) = 6 \times 0^2 - 6 \times 0 - 12 = -12$. (1 pt)
La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0), \quad \text{soit} \quad \boxed{y = -12x + 5}.$$

Exercice 2 – L'épidémie de bronchiolite

6 points

- 1) Les points A et C de la courbe ont pour ordonnées 48 et 84 : $f(2) = 48$ et $f(8) = 84$. (1 pt)
- 2) $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en A . Cette tangente passe par $A(2; 48)$ et par l'origine $O(0; 0)$ (ou par le point $(5; 120)$) : (1,5 pt)

$$f'(2) = \frac{48 - 0}{2 - 0} = \boxed{24}.$$

La tangente en B est horizontale : $f'(6) = 0$.

La tangente en C passe par $C(8; 84)$ et par le point $(9; 36)$: $f'(8) = \frac{36 - 84}{9 - 8} = \boxed{-48}$.

- 3) **Première affirmation** : $f'(2) = 24$. Autour de la deuxième semaine, le nombre d'hospitalisés augmente au rythme d'environ 24 nourrissons par semaine : l'affirmation est **cohérente**. (2 pts)

Deuxième affirmation : sur le document 1, la courbe monte jusqu'au point B d'abscisse 6, où la tangente est horizontale; le maximum de f est atteint pour $t = 6$, et non pour $t = 5$ (on lit $f(5) = 120 < f(6) = 128$). L'affirmation est **incohérente** : le pic a eu lieu à la sixième semaine.

Troisième affirmation : $f'(8) = -48$. Autour de la huitième semaine, le nombre d'hospitalisés diminue au rythme d'environ 48 nourrissons par semaine : l'affirmation est **cohérente**.

- 4) $f'(t) = -3t^2 + 9 \times 2t = \boxed{-3t^2 + 18t}$, donc $f'(5) = -3 \times 25 + 18 \times 5 = -75 + 90 = \boxed{15}$. (1,5 pt)
 $f'(5) > 0$: la fonction f est encore croissante au voisinage de $t = 5$.

Pendant la cinquième semaine, le nombre de nourrissons hospitalisés augmentait encore, d'environ 15 par semaine : le pic n'était donc pas atteint, contrairement à ce qu'affirme le journal.

Exercice 3 – Le tirage d'un premier roman

10 points

Partie A – Le coût de fabrication

1) $C(0) = \boxed{1\,000}$. (1 pt)

Même sans imprimer un seul exemplaire, l'éditeur supporte 1 000 € de frais (frais fixes : mise en page, couverture, préparation de l'impression).

2) $C'(q) = 5 \times 3q^2 - 60 \times 2q + 500 = \boxed{15q^2 - 120q + 500}$. (1 pt)

3) a. $C'(6) = 15 \times 36 - 120 \times 6 + 500 = 540 - 720 + 500 = \boxed{320}$. (1 pt)

b. Lorsque l'éditeur imprime 600 exemplaires, imprimer une centaine d'exemplaires de plus lui coûterait environ 320 €, soit environ 3,20 € par exemplaire supplémentaire. (1 pt)

Partie B – Le bénéfice

4) Une centaine d'exemplaires rapporte $100 \times 8 = 800$ €; pour q centaines, la recette est $R(q) = 800q$. (1 pt)

$$\begin{aligned} B(q) &= R(q) - C(q) = 800q - (5q^3 - 60q^2 + 500q + 1\,000) \\ &= -5q^3 + 60q^2 + 300q - 1\,000. \end{aligned}$$

5) $B'(q) = -5 \times 3q^2 + 60 \times 2q + 300 = \boxed{-15q^2 + 120q + 300}$. (1,5 pt)

En développant : $-15(q-10)(q+2) = -15(q^2 + 2q - 10q - 20) = -15(q^2 - 8q - 20) = -15q^2 + 120q + 300 = B'(q)$.

6) Sur $[0; 12]$, $q + 2 > 0$ et $-15 < 0$: le signe de $B'(q)$ est donc l'opposé de celui de $q - 10$. (2 pts)
 $B'(q) > 0$ sur $[0; 10[$, $B'(10) = 0$ et $B'(q) < 0$ sur $]10; 12]$.

$$B(0) = -1\,000; B(10) = -5\,000 + 6\,000 + 3\,000 - 1\,000 = 3\,000; B(12) = -8\,640 + 8\,640 + 3\,600 - 1\,000 = 2\,600.$$

q	0	10	12
-15	—		—
$q - 10$	—	0	+
$q + 2$	+		+
$B'(q)$	+	0	—
B	−1 000	3 000	2 600

7) Le maximum de B sur $[0; 12]$ est atteint pour $q = 10$ et vaut 3 000. (1,5 pt)

Pour un bénéfice maximal, l'éditeur doit imprimer 1 000 exemplaires ; il gagne alors 3 000 €.