

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 – Deux tangentes horizontales

4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

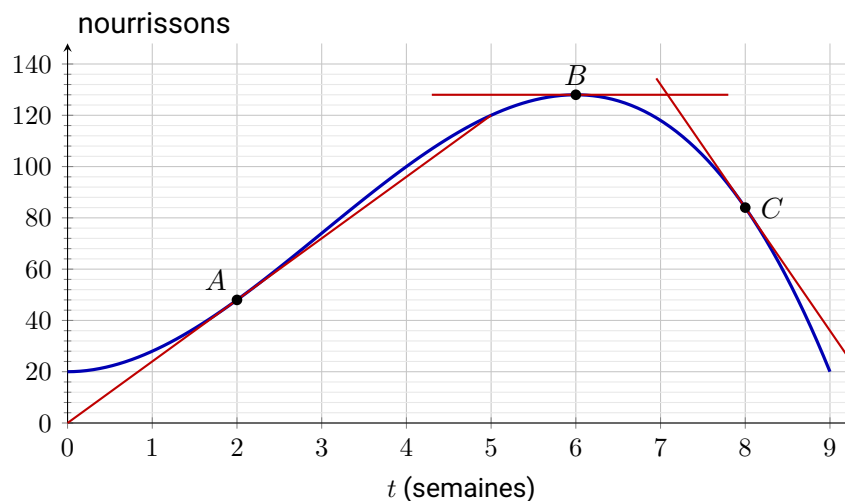
- 1) Calculer $f'(x)$, puis vérifier que, pour tout réel x , $f'(x) = 6(x - 2)(x + 1)$.
- 2) Calculer $f'(-1)$ et $f'(2)$. Que peut-on en déduire pour les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1 et 2 ?
- 3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 .

Exercice 2 – L'épidémie de bronchiolite

6 points

Pendant un hiver, l'agence régionale de santé suit le nombre de nourrissons hospitalisés pour une bronchiolite dans les hôpitaux d'un département. On note $f(t)$ ce nombre, t semaines après le début du suivi, pour $t \in [0; 9]$.

Document 1 – La courbe de suivi. Les droites tracées sont les tangentes à la courbe aux points A , B et C d'abscisses respectives 2, 6 et 8.



Document 2 – Extrait du bulletin publié par un journal local.

« Deux semaines après le début du suivi, les hospitalisations progressaient d'environ 24 nourrissons par semaine. Le pic de l'épidémie a été atteint dès la cinquième semaine. À la huitième semaine, le reflux était net : le nombre d'hospitalisés diminuait alors d'environ 48 par semaine. »

- 1) Lire sur le document 1 les valeurs de $f(2)$ et de $f(8)$.
- 2) Déterminer graphiquement $f'(2)$, $f'(6)$ et $f'(8)$, en expliquant la méthode utilisée pour $f'(2)$.

- 3) Pour chacune des trois affirmations du document 2, dire si elle est cohérente avec le document 1. Justifier.
- 4) On admet que $f(t) = -t^3 + 9t^2 + 20$. Calculer $f'(t)$, puis $f'(5)$. Expliquer en une phrase ce que ce résultat apprend sur l'évolution de l'épidémie au cours de la cinquième semaine.

Exercice 3 — Le tirage d'un premier roman

10 points

Une petite maison d'édition prépare l'impression du premier roman d'une autrice. Le tirage est compris entre 0 et 1 200 exemplaires. On note q le nombre de centaines d'exemplaires imprimés, avec $q \in [0 ; 12]$.

Le coût de fabrication, en euros, est modélisé par $C(q) = 5q^3 - 60q^2 + 500q + 1\,000$.

Partie A — Le coût de fabrication

- 1) Calculer $C(0)$. Interpréter ce résultat dans le contexte.
- 2) Calculer $C'(q)$.
- 3) En économie, on assimile le coût marginal pour une production q au nombre dérivé $C'(q)$.
 - a. Calculer $C'(6)$.
 - b. Le coût marginal $C'(6)$ s'exprime en euros par centaine d'exemplaires. Expliquer, par une phrase, ce qu'il représente pour l'éditeur lorsqu'il imprime 600 exemplaires.

Partie B — Le bénéfice

L'éditeur perçoit 8 euros par exemplaire vendu. On suppose que tous les exemplaires imprimés sont vendus.

- 4) Justifier que la recette s'écrit $R(q) = 800q$, puis que le bénéfice est $B(q) = -5q^3 + 60q^2 + 300q - 1\,000$.
- 5) Calculer $B'(q)$, puis vérifier que $B'(q) = -15(q - 10)(q + 2)$.
- 6) Étudier le signe de $B'(q)$ sur $[0 ; 12]$ et dresser le tableau de variations de B sur cet intervalle.
- 7) Quel tirage l'éditeur doit-il choisir pour que son bénéfice soit maximal ? Donner ce bénéfice, puis conclure par une phrase.