

Exercice 1 – Six paraboles express (réponses courtes)

3 points

N°	Réponse	Pour comprendre
1	-1 et 3	Abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_k$ avec l'axe des abscisses.
2	$] -1 ; 3[$	La courbe est strictement en dessous de l'axe des abscisses entre -1 et 3 (bornes exclues, où $k(x) = 0$).
3	0	Le point le plus bas de la courbe a pour ordonnée -4 : la droite d'équation $y = -5$ ne coupe pas la courbe.
4	oui	$2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.
5	2 et -7	Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $x - 2 = 0$ ou $x + 7 = 0$.
6	$x = 4$	Les racines 2 et 6 sont symétriques par rapport à l'axe, qui passe par leur milieu $\frac{2+6}{2} = 4$.

Exercice 2 – Une racine évidente, une racine cachée

7 points

1) $f(2) = 2^2 + 2 - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$: le nombre 2 est une racine de f . (0,5 pt)

2) On développe : $(x - 2)(x + b) = x^2 + bx - 2x - 2b = x^2 + (b - 2)x - 2b$. (1,5 pt)
Pour obtenir $x^2 + x - 6$ pour tout réel x , il faut $b - 2 = 1$ et $-2b = -6$, soit $b = 3$ (les deux conditions sont vérifiées).

Ainsi $f(x) = (x - 2)(x + 3)$, et $x + 3 = 0 \iff x = -3$: l'autre racine de f est -3 .

3) $x - 2 > 0 \iff x > 2$ et $x + 3 > 0 \iff x > -3$. (2 pts)

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$f(x) < 0 \iff x \in] -3 ; 2[.$$

4) (3 pts : 1 + 1 + 1)

a. On veut $g(x) < 0$ et $g(x + \text{pas}) \geq 0$: la condition complète est

if g(x) < 0 and g(x + pas) >= 0 :

b. Pour k allant de 0 à 9 , $x = 1 + 0,1k$: le programme teste $x = 1 ; 1,1 ; 1,2 ; \dots ; 1,9$ (et compare chaque fois avec $x + 0,1$, jusqu'à 2).

L'affichage $1.7 \quad 1.8$ signifie que $g(1,7) < 0$ et $g(1,8) \geq 0$: la fonction g passe d'une valeur

négative à une valeur positive entre 1,7 et 1,8. On en déduit l'encadrement $1,7 < \alpha \leq 1,8$, d'amplitude 0,1.

c. On recommence le balayage à partir de 1,7 avec un pas de 0,01 et 10 valeurs : $\text{balayage}(1.7, 0.01, 10)$.

(Exécuté, cet appel affiche 1.79 1.8, soit $1,79 < \alpha \leq 1,8$.)

Exercice 3 – Banquet et concert dans la même salle

5 points

1) $2 \times 120 = 3 \times 80 = 4 \times 60 = 5 \times 48 = 6 \times 40 = 8 \times 30 = 240$. (1,5 pt)

Le produit $u \times t$ est constant : quand le nombre de serveurs est multiplié par 2, le temps est divisé par 2. Les grandeurs u et t sont inversement proportionnelles, et $t = \frac{240}{u}$.

2) $t = \frac{240}{10} = \text{24}$: avec 10 serveurs, le dressage durerait 24 minutes. (0,5 pt)

3) Les points sont alignés avec l'origine du repère : d est proportionnelle à $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $d = k \times \frac{1}{n}$. (1,5 pt)

Pour $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, on lit $d = 9$, donc $k = 9 \times 2 = 18$ (contrôle : pour $\frac{1}{n} = \frac{1}{6}$, $18 \times \frac{1}{6} = 3$, valeur lue).

Ainsi $d = \frac{18}{n}$: la durée de montage et le nombre de techniciens sont, eux aussi, inversement proportionnels.

4) De 14 h à 19 h 30, on dispose de 5 h 30. Avec 4 serveurs, le dressage dure $\frac{240}{4} = 60$ minutes, soit 1 heure. Il reste au plus 4 h 30 = 4,5 heures pour monter la scène. (1,5 pt)

On cherche n entier tel que $\frac{18}{n} \leq 4,5$, soit $n \geq \frac{18}{4,5} = 4$.

Contrôle : avec 3 techniciens, $d = 6$ h, la scène serait prête à 20 h, trop tard ; avec 4 techniciens, $d = 4,5$ h : scène prête à 18 h 30, tables dressées à 19 h 30.

Le régisseur doit prévoir au moins 4 techniciens : avec 4 techniciens, la scène sera montée à 18 h 30 et les tables dressées juste à 19 h 30, sans aucune marge ; un cinquième technicien ($d = 3,6$ h, soit 3 h 36 min) donnerait 54 minutes d'avance.

Accepter aussi la réponse « 5 techniciens » si elle est justifiée par le souhait de garder une marge : avec 5 techniciens, $d = 3,6$ h, tout est prêt à 18 h 36.

Exercice 4 – Une suite née d’une parabole (transversal : suites)

5 points

1) $u(0) = 7$, $u(1) = -1 + 6 + 7 = \boxed{12}$, $u(2) = -4 + 12 + 7 = \boxed{15}$, $u(3) = -9 + 18 + 7 = \boxed{16}$.
(1 pt)

2) $u(1) - u(0) = 5$ et $u(2) - u(1) = 3$: les différences ne sont pas égales, u n'est pas arithmétique.
(1 pt)
 $\frac{u(1)}{u(0)} = \frac{12}{7}$ et $\frac{u(2)}{u(1)} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$; or $\frac{12}{7} \neq \frac{5}{4}$ (car $12 \times 4 = 48 \neq 35 = 7 \times 5$) : u n'est pas géométrique.

3) a. D'après la question 1, $u(0) = 7 < u(1) = 12 < u(2) = 15 < u(3) = 16$: la suite commence par croître, elle n'est donc pas décroissante. (0,5 pt)
L'erreur de Léo : la « formule » du sommet $(0; c)$ n'est vraie que pour les fonctions $x \mapsto ax^2 + c$, c'est-à-dire quand $b = 0$. Ici $b = 6 \neq 0$: le point $(0; 7)$ est seulement le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées.

b. $f(x) = 7 \iff -x^2 + 6x = 0 \iff x(-x + 6) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 6$. (1 pt)
Les points $(0; 7)$ et $(6; 7)$ de la parabole sont symétriques par rapport à son axe, qui passe par leur milieu : l'axe est la droite d'équation $x = 3$. Le sommet a pour abscisse 3 et $f(3) = 16$: c'est le point $(3; 16)$.

c. La parabole est tournée vers le bas ($a = -1 < 0$) : f est croissante sur $] -\infty; 3]$ et décroissante sur $[3; +\infty[$. Donc la suite u est **croissante de $u(0)$ à $u(3)$, puis décroissante à partir du rang 3** : $u(3) = 16$ est son plus grand terme ($u(4) = 15, u(5) = 12, \dots$). Elle n'est pas monotone. (0,5 pt)

4) $-(x+1)(x-7) = -(x^2 - 7x + x - 7) = -(x^2 - 6x - 7) = -x^2 + 6x + 7 = f(x)$. (1 pt)
Racines -1 et 7 ; coefficient -1 négatif : $f(x) > 0$ entre les racines, donc pour $-1 < x < 7$.
Pour un entier naturel n : $u(n) > 0 \iff 0 \leq n \leq 6$. Les termes sont strictement positifs jusqu'au rang $\boxed{6}$; $u(7) = 0$, et $u(n) < 0$ à partir du rang 8 ($u(8) = -9$).