

Exercice 1 — Le juste prix d'une salle d'échappée game

10 points

Partie A — Construire le modèle

- 1) Au prix de x euros, le prix dépasse 10 € de $x - 10$ euros; on perd 20 joueurs par euro supplémentaire : (1 pt)

$$N(x) = 400 - 20(x - 10) = 400 - 20x + 200 = \boxed{600 - 20x}.$$

$N(20) = 600 - 400 = \boxed{200}$: au prix de 20 €, la salle accueillerait 200 joueurs par mois.

- 2) Sur chaque joueur, la salle encaisse x euros et dépense 10 euros de coûts variables : elle gagne $x - 10$ euros par joueur. Avec $N(x) = 600 - 20x$ joueurs, cela fait $(x - 10)(600 - 20x)$ euros, dont il faut retirer les 1 500 € de charges fixes : (1,5 pt)

$$B(x) = \text{recette} - \text{coûts variables} - \text{charges fixes} = (x - 10)(600 - 20x) - 1\,500.$$

- 3) On développe : (1,5 pt)

$$(x - 10)(600 - 20x) - 1\,500 = 600x - 20x^2 - 6\,000 + 200x - 1\,500 = \boxed{-20x^2 + 800x - 7\,500}.$$

Et : $-20(x - 15)(x - 25) = -20(x^2 - 25x - 15x + 375) = -20(x^2 - 40x + 375) = -20x^2 + 800x - 7\,500$.
Les deux expressions sont égales : $\boxed{B(x) = -20(x - 15)(x - 25)}$.

Partie B — Exploiter le modèle

- 4) Les racines de B sont 15 et 25; le coefficient -20 est négatif. (1,5 pt)

x	10	15	25	30
-20	—	—	—	—
$x - 15$	—	0	+	+
$x - 25$	—	—	0	+
$B(x)$	—	0	+	0

$B(x) > 0$ pour $x \in \boxed{]15; 25[}$: la salle est bénéficiaire lorsque le prix par joueur est strictement compris entre 15 € et 25 €; à 15 € ou à 25 €, le bénéfice est nul; en dehors, la salle perd de l'argent.

- 5) a. On trace la droite horizontale d'équation $y = 300$: la courbe est au-dessus de cette droite pour x compris entre environ 17 et environ 23. Les prix qui conviennent sont donc, à peu près, ceux de l'intervalle $\boxed{[17; 23]}$ (lecture graphique). (1 pt)

- b. Table de B avec un pas de 0,01 : $B(16,83) \approx 299,02 < 300$ et $B(16,84) \approx 300,29 \geq 300$. (1 pt)

Le plus petit prix qui convient, au centime près, est $\boxed{16,84 \text{ €}}$. (Par symétrie, le plus grand est 23,16 €.)

- 6) Les racines 15 et 25 ont la même image 0 : les points (15 ; 0) et (25 ; 0) de la courbe sont symé-

triques par rapport à l'axe de la parabole. Cet axe passe donc par le milieu de ces deux points : c'est la droite d'équation $x = 20$, car $\frac{15 + 25}{2} = 20$. (1,5 pt)

$B(20) = -20 \times 5 \times (-5) = 500$: le sommet est le point $(20; 500)$.

$B(10) = -20 \times (-5) \times (-15) = -1\,500$ et $B(30) = -20 \times 15 \times 5 = -1\,500$. Le coefficient de x^2 est négatif : la parabole est tournée vers le bas.

x	10	20	30
B	-1 500	500	-1 500

- 7) Nous conseillons au gérant de fixer le prix à 20 € par joueur. Selon le modèle, la salle accueillera alors 200 joueurs par mois et dégagera le bénéfice mensuel maximal, 500 €. S'il souhaite garder une marge de manœuvre, tout prix compris entre 16,84 € et 23,16 € lui assure au moins 300 € de bénéfice. (1 pt)

Exercice 2 – Paraboles et sécantes (QCM justifié)

6 points

1) Réponse b.

(1,5 pt)

$f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f(4) = 16 - 12 = 4$, donc le taux de variation vaut $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - (-2)}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

2) Réponse d.

(1,5 pt)

La courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et en 3 : les racines sont -1 et 3 , ce qui élimine a et b (racines 1 et -3). La parabole est tournée vers le bas, donc le coefficient est négatif : c'est $-2(x + 1)(x - 3)$. Contrôle : pour $x = 0$, $-2 \times 1 \times (-3) = 6$, et la courbe coupe bien l'axe des ordonnées en 6 .

3) Réponse b.

(1,5 pt)

Si $a < b$ et $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} < 0$, comme $b - a > 0$, on a $g(b) - g(a) < 0$, c'est-à-dire $g(b) < g(a)$: quand x augmente, $g(x)$ diminue. La fonction g est décroissante sur $[0; 10]$ (toutes les sécantes « descendent »).

4) Réponse c.

(1,5 pt)

$3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2)$; ce produit est nul pour $x = 2$ ou $x = -2$. La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et 2 . (Le point $(0; -12)$ est son intersection avec l'axe des ordonnées.)

Exercice 3 – Trouver le sommet sans formule

4 points

- 1) $p(x) = 3 \iff 2x^2 - 8x + 3 = 3 \iff 2x^2 - 8x = 0 \iff 2x(x - 4) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 4.$
(1 pt)

Les solutions sont 0 et 4.

- 2) Les points $(0; 3)$ et $(4; 3)$ de la parabole ont la même ordonnée : ils sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole, qui passe par leur milieu. L'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 2$, car $\frac{0 + 4}{2} = 2.$ (1 pt)

- 3) Le sommet est sur l'axe : son abscisse est 2 et $p(2) = 2 \times 4 - 16 + 3 = -5$. Le sommet est $(2; -5)$. (2 pts)

Le coefficient de x^2 est $2 > 0$: la parabole est tournée vers le haut, p est décroissante puis croissante et admet un minimum -5 en $x = 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
p			