

Exercice 1 – Lire une parabole (vrai ou faux)

6 points

Affirmation 1. Vrai.

(1,5 pt)

La droite horizontale d'équation $y = 4$ coupe la courbe en deux points, d'abscisses 1 et 3. On le confirme par le calcul : $f(1) = -0,5 \times 2 \times (-4) = 4$ et $f(3) = -0,5 \times 4 \times (-2) = 4$.

Ce sont les deux seules solutions : la courbe ne coupe la droite $y = 4$ qu'en ces deux points.

Affirmation 2. Faux.

(1,5 pt)

$f(0) = -0,5 \times 1 \times (-5) = 2,5$ et $f(4) = -0,5 \times 5 \times (-1) = 2,5$. Les nombres 0 et 4 vérifient donc $f(x) = 2,5$, et non $f(x) > 2,5$: ils ne sont pas solutions. La courbe est strictement au-dessus de la droite $y = 2,5$ entre les abscisses 0 et 4 exclues : l'ensemble des solutions est $]0; 4[$, et non $[0; 4]$.

Affirmation 3. Faux.

(1,5 pt)

Pour $x = 2$: $0,5 \times (2+1)(2-5) = 0,5 \times 3 \times (-3) = -4,5$, alors que le point de la courbe d'abscisse 2 a pour ordonnée $f(2) = 4,5$.

Autre argument : le coefficient 0,5 est positif, la parabole de $x \mapsto 0,5(x+1)(x-5)$ est donc « tournée vers le haut », alors que la courbe tracée est « tournée vers le bas ». Les deux courbes ont les mêmes points d'intersection avec l'axe des abscisses, mais elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à cet axe.

Affirmation 4. Vrai.

(1,5 pt)

$h(x) = -2x^2 + 3$ est de la forme $ax^2 + c$ avec $a = -2 < 0$: sa courbe est une parabole tournée vers le bas.

Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc $-2x^2 \leq 0$ et $h(x) = 3 - 2x^2 \leq 3 = h(0)$: la fonction h admet un maximum 3, atteint en $x = 0$. Le sommet de la parabole est bien le point $(0; 3)$.

Exercice 2 – Une racine, une factorisation, un signe

8 points

1) $g(-2) = 3 \times (-2)^2 - 3 \times (-2) - 18 = 12 + 6 - 18 = \boxed{0}$: le nombre -2 est une **racine** du polynôme g . (1 pt)

2) (1,5 pt)

$$3(x+2)(x-3) = 3(x^2 - 3x + 2x - 6) = 3(x^2 - x - 6) = 3x^2 - 3x - 18.$$

On retrouve exactement $g(x)$: pour tout réel x , $\boxed{g(x) = 3(x+2)(x-3)}$.

3) On utilise la forme factorisée $g(x) = 3(x+2)(x-3)$: un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul ($3 \neq 0$). (1 pt)

$x+2=0 \iff x=-2$ ou $x-3=0 \iff x=3$. Les racines de g sont $\boxed{-2 \text{ et } 3}$.

4) $x+2 > 0 \iff x > -2$ et $x-3 > 0 \iff x > 3$; le facteur 3 est positif. (2,5 pts)

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
3	+	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$g(x)$	+	0	-	+

On retrouve la règle : $g(x)$ est du signe de son coefficient 3 (positif) à l'extérieur des racines et du signe contraire entre les racines.

5) D'après le tableau : (2 pts)

$g(x) \leq 0 \iff x \in \boxed{[-2; 3]}$ et $g(x) > 0 \iff x \in \boxed{]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[}$.

Exercice 3 – Question ouverte : le gratin refroidit-il régulièrement? 6 points

1) Des valeurs exactes. $T(0) = 20 + \frac{3\,600}{25} = 164$, $T(10) = 20 + \frac{2\,500}{25} = 120$, $T(20) = 20 + \frac{1\,600}{25} = 84$,
 $T(50) = 20 + \frac{100}{25} = 24$, $T(60) = 20$.

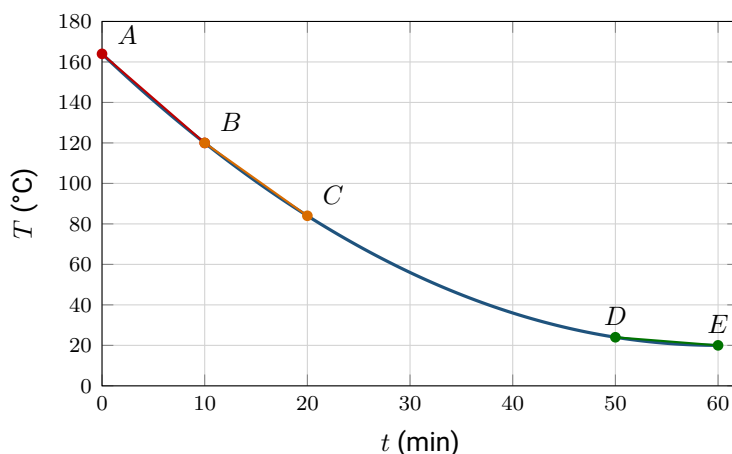
Des taux de variation. Le taux de variation de T entre a et b est $\frac{T(b) - T(a)}{b - a}$:

$$\text{entre 0 et 10 : } \frac{120 - 164}{10} = -4,4 \quad \text{entre 10 et 20 : } \frac{84 - 120}{10} = -3,6$$

$$\text{entre 50 et 60 : } \frac{20 - 24}{10} = -0,4.$$

Pendant les dix premières minutes, le gratin perd 44°C , soit $4,4^\circ\text{C}$ par minute en moyenne; entre la 10^{e} et la 20^{e} minute, il n'en perd plus que 36 ; pendant les dix dernières minutes, seulement 4 .

Interprétation graphique. Chaque taux de variation est la pente (le coefficient directeur) de la sécante passant par les deux points correspondants de la courbe. Les sécantes (AB) , (BC) et (DE) ci-dessous sont de moins en moins inclinées : la courbe « s'aplatit ».



(3,5 pts : valeurs 1, taux 1,5, sécantes 1)

2) Le signe. Tous ces taux sont négatifs : la température diminue sur tout l'intervalle $[0 ; 60]$, la fonction T y est décroissante.

Conclusion. L'affirmation de Sophie est fausse : le gratin refroidit sans arrêt, mais de moins en moins vite. Il perd 44°C pendant les dix premières minutes et seulement 4°C pendant les dix dernières, car sa température se rapproche de celle de la pièce (20°C). Si Sophie avait raison, la courbe serait une droite et tous les taux de variation sur dix minutes seraient égaux.

(2,5 pts : signe et sens de variation 1, conclusion rédigée 1,5)