

Exercice 1 – Une culture bactérienne en fermenteur

12 points

Partie A – Des mesures au modèle

1) (1,5 pt)

$$\frac{2,60}{2,00} = 1,30 \quad \frac{3,38}{2,60} = 1,30 \quad \frac{4,39}{3,38} \approx 1,30 \quad \frac{5,71}{4,39} \approx 1,30$$

2) Les quatre quotients sont égaux à 1,30 au centième près : d'une heure à la suivante, la concentration est multipliée (aux erreurs de mesure près) par le même nombre. Il est donc raisonnable de la modéliser par une suite géométrique de raison 1,3. (1,5 pt)

Multiplier par $1,3 = 1 + \frac{30}{100}$, c'est augmenter de 30 % : la concentration augmente de 30 % par heure.

Partie B – Exploiter le modèle

3) (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 1,3, donc $u_n = 2 \times 1,3^n$. (1 pt)

4) $u_8 = 2 \times 1,3^8 \approx$ 16,31. (1,5 pt)

Selon le modèle, au bout de 8 heures, la culture contient environ 16,31 millions de bactéries par millilitre, soit plus de huit fois la concentration initiale.

5) Le premier terme $u_0 = 2$ est strictement positif et la raison 1,3 est strictement supérieure à 1 : chaque terme est plus grand que le précédent. La suite (u_n) est croissante. (1 pt)

6) On fait afficher la table de $u_n = 2 \times 1,3^n$: (2 pts)

$$u_{21} = 2 \times 1,3^{21} \approx 494 \quad \text{et} \quad u_{22} = 2 \times 1,3^{22} \approx 642.$$

Comme $u_{21} < 500 < u_{22}$ et que la suite est croissante, la concentration dépasse 500 millions/mL pour la première fois au bout de 22 heures.

Le transfert dans une cuve plus grande doit avoir lieu au bout de 22 heures.

Partie C – Un protocole avec prélèvements

7) $v_1 = 1,3 \times 2 - 0,5 = 2,6 - 0,5 =$ 2,1; (1 pt)

$$v_2 = 1,3 \times 2,1 - 0,5 = 2,73 - 0,5 =$$

$$\text{2,23};$$

$$v_3 = 1,3 \times 2,23 - 0,5 = 2,899 - 0,5 =$$

$$\text{2,399}.$$

8) $v_1 - v_0 = 0,1$ et $v_2 - v_1 = 0,13$: les différences ne sont pas égales, la suite n'est pas arithmétique.
 $\frac{v_1}{v_0} = \frac{2,1}{2} = 1,05$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{2,23}{2,1} \approx 1,062$: les quotients ne sont pas égaux, la suite n'est pas géométrique.

La suite (v_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique. (1 pt)

9) En répétant le calcul (touche « Ans » ou tableur) : $v_4 \approx 2,62$, $v_5 \approx 2,90$, puis $v_6 \approx$ 3,28. (1,5 pt)

La concentration ne se stabilise pas : elle continue d'augmenter, et de plus en plus vite (hausse de 0,1, puis 0,13, puis 0,169 million/mL). Le protocole ralentit seulement la croissance : au bout de 6 heures, la concentration est d'environ 3,28 millions/mL avec prélèvements, contre $u_6 \approx 9,65$ millions/mL sans prélèvement.

Exercice 2 — Le cahier de laboratoire (vrai ou faux)

8 points

Affirmation 1. Faux.

(2 pts)

Le premier terme $w_0 = 3$ est strictement positif et la raison vérifie $0 < 0,9 < 1$: chaque terme vaut 90 % du précédent, donc lui est inférieur. La suite (w_n) est décroissante; par exemple $w_1 = 3 \times 0,9 = 2,7 < w_0 = 3$.

Affirmation 2. Faux.

(2 pts)

On lit $t_0 = 2, t_1 = 3,5, t_2 = 5, t_3 = 6,5, t_4 = 8, t_5 = 9,5$. Les points sont alignés et l'on monte toujours de 1,5 d'un rang au suivant : la suite semble *arithmétique* de raison 1,5. Elle ne peut pas être géométrique : $\frac{t_1}{t_0} = \frac{3,5}{2} = 1,75$ alors que $\frac{t_2}{t_1} = \frac{5}{3,5} \approx 1,43$; les quotients ne sont pas égaux.

Affirmation 3. Vrai.

(2 pts)

$$a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 6.$$

$a_1 - a_0 = 1$ mais $a_2 - a_1 = 3$: la suite n'est pas arithmétique.

$$\frac{a_1}{a_0} = 1,5 \text{ mais } \frac{a_2}{a_1} = 2 : \text{ la suite n'est pas géométrique.}$$

Affirmation 4. Vrai.

(2 pts)

Augmenter de 3 % par an revient à multiplier chaque année par 1,03 : au bout de n années, le nombre d'analyses est multiplié par $1,03^n$. À la calculatrice :

$$1,03^{23} \approx 1,97 < 2 \quad \text{et} \quad 1,03^{24} \approx 2,03 > 2.$$

Le nombre d'analyses aura donc doublé au bout de 24 ans, c'est-à-dire en moins de 25 ans.