

## Exercice 1

5 points

- 1) Une tenue, c'est un haut (15 choix) puis un bas (18 choix). D'après le principe multiplicatif, le nombre de tenues est

$$15 \times 18 = \boxed{270}.$$

- 2) Les hauts qui ne sont pas en fibre synthétique sont au nombre de  $4 + 5 = 9$ ; les bas, au nombre de  $8 + 3 = 11$ . Par le principe multiplicatif, le nombre de tenues sans aucune pièce synthétique est

$$9 \times 11 = \boxed{99}.$$

Vérification par le complémentaire : les tenues contenant au moins une pièce synthétique sont celles dont le haut est synthétique ( $6 \times 18 = 108$ ) ou dont le haut ne l'est pas mais le bas l'est ( $9 \times 7 = 63$ ), soit 171; et  $270 - 171 = 99$ .

- 3) Le haut et le bas sont choisis uniformément et indépendamment : les 270 tenues sont équiprobables. On est dans une situation d'équiprobabilité, et

$$P(\text{« tout en coton »}) = \frac{\text{nombre de tenues tout en coton}}{\text{nombre total de tenues}} = \frac{4 \times 8}{270} = \frac{32}{270} = \frac{16}{135}.$$

- 4) On passe par l'événement contraire  $\overline{D}$  : « le haut et le bas sont dans la même matière ». Les trois cas sont incompatibles :

- tous deux en coton :  $4 \times 8 = 32$  tenues;
- tous deux en laine mérinos :  $5 \times 3 = 15$  tenues;
- tous deux en fibre synthétique :  $6 \times 7 = 42$  tenues.

Donc  $\overline{D}$  compte  $32 + 15 + 42 = 89$  tenues et  $P(\overline{D}) = \frac{89}{270}$ . Par conséquent :

$$P(D) = 1 - \frac{89}{270} = \frac{181}{270}.$$

Cette fraction est irréductible : 181 est un nombre premier qui ne divise pas  $270 = 2 \times 3^3 \times 5$ .

- 5) L'ordre ne compte pas et deux écussons peuvent avoir le même motif. On distingue deux cas qui ne se recouvrent pas :

- **les deux écussons ont le même motif** : il suffit de choisir ce motif, soit 8 possibilités;
- **les deux motifs sont différents** : on choisit une partie à 2 éléments parmi les 8 motifs, soit  $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$  possibilités.

Au total,  $8 + 28 = 36$  : le client dispose bien de  $\boxed{36}$  choix.

- 6) Même méthode, avec trois cas incompatibles :

- **trois écussons identiques** : 8 possibilités (le choix du motif);
- **exactement deux identiques** : on choisit le motif présent deux fois (8 choix), puis le motif présent une fois, différent du premier (7 choix), soit  $8 \times 7 = 56$  possibilités;
- **trois motifs différents** :  $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$  possibilités.

Au total :  $8 + 56 + 56 = \boxed{120}$  choix.

## Exercice 2

6 points

- a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 + 2n^3) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n^2) = -\infty$ . Il n'y a pas de forme indéterminée; par produit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 + 2n^3) (1 - n^2) = -\infty}.$$

- b. Numérateur et dénominateur tendent respectivement vers  $+\infty$  et  $-\infty$  : forme indéterminée «  $\frac{\infty}{\infty}$  ». On factorise par le terme de plus haut degré,  $n^4$ . Pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{2n^4 + 3}{n^2 - 5n^4} = \frac{n^4 \left(2 + \frac{3}{n^4}\right)}{n^4 \left(\frac{1}{n^2} - 5\right)} = \frac{2 + \frac{3}{n^4}}{\frac{1}{n^2} - 5}.$$

Or  $\frac{3}{n^4} \rightarrow 0$  et  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ ; le numérateur tend vers 2 et le dénominateur vers  $-5$ . Par quotient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 + 3}{n^2 - 5n^4} = -\frac{2}{5}}.$$

- c. Recherche de  $n_0$ . Pour  $n \geq 1$  :

$$\frac{750}{n} \leq \frac{1}{2} \iff 1500 \leq n \quad (\text{on multiplie par } 2n > 0).$$

Le plus petit entier qui convient est  $n_0 = 1500$ .

**Encadrement.** Soit  $n \geq 1500$ . On a  $0 < \frac{750}{n} \leq \frac{1}{2}$ ; la fonction  $x \mapsto x^n$  étant croissante sur  $[0; +\infty[$ , on en déduit

$$0 < \left(\frac{750}{n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Limite.**  $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , avec  $0 < \frac{1}{2} < 1$  : elle tend vers 0. Les deux suites qui encadrent tendent vers 0; d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{750}{n}\right)^n = 0}.$$

*Remarque :* les premiers termes sont, eux, gigantesques ( $\left(\frac{750}{1}\right)^1 = 750$ ,  $\left(\frac{750}{2}\right)^2 = 140\,625$ ...); la limite ne dépend que du comportement pour  $n$  grand.

### Exercice 3

9 points

- 1) Le 1<sup>er</sup> jour du mois  $n$ , le fonds compte  $u_n$  livres. À la fin du mois, 15 % d'entre eux sont retirés : il en reste 85 %, soit  $\left(1 - \frac{15}{100}\right) u_n = 0,85 u_n$ . On ajoute ensuite les 300 livres achetés. Donc, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,85 u_n + 300.$$

#### Partie A ( $u_0 = 1\,200$ )

- 2) Le 1<sup>er</sup> octobre 2026 correspond à  $n = 1$  :

$$u_1 = 0,85 \times 1\,200 + 300 = 1\,020 + 300 = 1\,320.$$

Le fonds de prêt compte 1 320 livres au 1<sup>er</sup> octobre 2026.

- 3) Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n \leq 2\,000$  ».

**Initialisation.**  $u_0 = 1\,200 \leq 2\,000$  :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

**Hérédité.** Soit  $n$  un entier naturel tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 2\,000 \\ \iff 0,85 u_n &\leq 1\,700 && \text{(on multiplie par } 0,85 > 0\text{)} \\ \iff 0,85 u_n + 300 &\leq 2\,000 && \text{(on ajoute 300)} \\ \iff u_{n+1} &\leq 2\,000 && \text{(définition de } u_{n+1}\text{)} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

**Conclusion.**  $\mathcal{P}(0)$  est vraie et  $\mathcal{P}$  est héréditaire; par récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 2\,000$ .

- 4) Pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} - u_n = 0,85 u_n + 300 - u_n = 300 - 0,15 u_n.$$

D'après la question 3),  $u_n \leq 2\,000$ , donc  $0,15 u_n \leq 0,15 \times 2\,000 = 300$ , d'où  $300 - 0,15 u_n \geq 0$ .

Ainsi  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  pour tout  $n$  : la suite  $(u_n)$  est croissante.

- 5) La suite  $(u_n)$  est croissante (question 4) et majorée par 2 000 (question 3). D'après le théorème de convergence monotone,  $(u_n)$  converge, vers une limite  $\ell \leq 2\,000$ .

- 6) On ajoute 1 mois tant que le fonds compte *strictement moins* de 1 950 livres :

```
1 def mois_seuil():
2     n = 0
3     u = 1200
4     while u < 1950 :
5         n = n + 1
6         u = 0.85 * u + 300
7     return n
```

La fonction renvoie 18 (programme exécuté). Contrôle à la calculatrice :  $u_{17} \approx 1\,949,5 < 1\,950$  et  $u_{18} \approx 1\,957,1 \geq 1\,950$ . Le fonds atteint au moins 1 950 livres au bout de 18 mois, c'est-à-dire

le 1<sup>er</sup> mars 2028.

**Partie B** ( $u_0 = a$ , avec  $a \geq 0$ )

7) Pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 2\,000 = 0,85 u_n + 300 - 2\,000 = 0,85 u_n - 1\,700 \\ &= 0,85 (u_n - 2\,000) = 0,85 w_n. \end{aligned}$$

La suite  $(w_n)$  est donc géométrique de raison 0,85, de premier terme

$$\boxed{w_0 = u_0 - 2\,000 = a - 2\,000}.$$

8) D'après le cours sur les suites géométriques, pour tout entier naturel  $n$  :

$$w_n = w_0 \times 0,85^n = (a - 2\,000) \times 0,85^n.$$

Comme  $w_n = u_n - 2\,000$ , on a  $u_n = w_n + 2\,000$ , d'où :

$$\boxed{u_n = 2\,000 + (a - 2\,000) \times 0,85^n}.$$

Vérification : pour  $n = 0$ , on retrouve  $u_0 = 2\,000 + a - 2\,000 = a$ .

9) Comme  $0 < 0,85 < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$ . Par produit par la constante  $a - 2\,000$  puis par somme :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\,000}.$$

Cette limite **ne dépend pas** de  $a$ .

10) Pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (a - 2\,000) \times 0,85^{n+1} - (a - 2\,000) \times 0,85^n \\ &= (a - 2\,000) \times 0,85^n \times (0,85 - 1) = -0,15 (a - 2\,000) \times 0,85^n. \end{aligned}$$

Comme  $0,85^n > 0$ , le signe de  $u_{n+1} - u_n$  est celui de  $-(a - 2\,000) = 2\,000 - a$  :

- si  $0 \leq a < 2\,000$  :  $u_{n+1} - u_n > 0$ , la suite est **strictement croissante** ;
- si  $a = 2\,000$  :  $u_{n+1} - u_n = 0$ , la suite est **constante** (égale à 2 000) ;
- si  $a > 2\,000$  :  $u_{n+1} - u_n < 0$ , la suite est **strictement décroissante**.

(Avec  $a = 1\,200$ , on retrouve la croissance de la partie A.)

11) Quel que soit le nombre de livres au départ, le fonds de prêt se stabilise à long terme autour de 2 000 livres :

- s'il part de moins de 2 000 livres, il augmente chaque mois en se rapprochant de 2 000 sans jamais les dépasser ;
- s'il part de plus de 2 000 livres, il diminue chaque mois en se rapprochant de 2 000 ;
- s'il part de 2 000 livres exactement, il ne bouge plus : les 15 % retirés ( $0,15 \times 2\,000 = 300$  livres) sont exactement compensés par les 300 livres achetés.