

Calculatrice autorisée

Toutes les réponses doivent être justifiées et clairement rédigées.

Exercice 1

5 points

Une boutique en ligne d'articles de randonnée vend des tenues composées d'un haut et d'un bas. Son catalogue comporte :

- 15 hauts : 4 en coton, 5 en laine mérinos et 6 en fibre synthétique ;
- 18 bas : 8 en coton, 3 en laine mérinos et 7 en fibre synthétique.

Une tenue est la donnée d'un haut et d'un bas du catalogue.

- 1) Déterminer le nombre de tenues différentes que propose la boutique.
- 2) Un randonneur ne veut porter aucune pièce en fibre synthétique. Combien de tenues lui conviennent ?

Une cliente laisse le site lui proposer une tenue : le haut et le bas sont tirés au hasard, chacun de façon équiprobable dans sa catégorie, et indépendamment l'un de l'autre. *Les probabilités demandées aux questions 3) et 4) seront données sous forme de fractions irréductibles.*

- 3) Calculer la probabilité que la tenue proposée soit entièrement en coton.
- 4) Calculer la probabilité que le haut et le bas de la tenue soient dans deux matières différentes (par exemple un haut en laine mérinos avec un bas en coton).

La boutique vend aussi des écussons brodés à coudre sur un sac à dos ; ils existent en 8 motifs différents, et l'on peut acheter plusieurs écussons du même motif. Seuls les motifs choisis comptent, pas l'ordre dans lequel on les choisit.

- 5) Un client achète deux écussons, éventuellement de même motif. Établir qu'il dispose de 36 choix possibles.
- 6) Combien de choix aurait-il s'il achetait trois écussons ?

Exercice 2

6 points

Calculer les limites suivantes.

$$\text{a. } \lim_{n \rightarrow +\infty} (5 + 2n^3) (1 - n^2) \quad \text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^4 + 3}{n^2 - 5n^4} \quad \text{c. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{750}{n} \right)^n$$

Aide pour la limite c. On pourra d'abord trouver le plus petit entier naturel n_0 tel que $\frac{750}{n} \leq \frac{1}{2}$, puis, pour tout entier $n \geq n_0$, encadrer $\left(\frac{750}{n} \right)^n$ entre 0 et le terme d'une suite géométrique bien choisie.

Exercice 3

9 points

Le fonds de prêt d'une médiathèque est renouvelé en continu. La direction constate que, chaque fin de mois, 15 % des livres de ce fonds en sont retirés (ouvrages abîmés, perdus ou périmés) ; elle achète alors 300 livres neufs chaque mois pour compenser ces retraits et répondre à la demande des lecteurs. On note, pour tout entier naturel n , u_n le nombre de livres du fonds de prêt n mois après le 1^{er} septembre 2026.

- 1) Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85 u_n + 300$.

Partie A

On suppose, dans cette partie uniquement, que $u_0 = 1\,200$.

- 2) Calculer le nombre de livres du fonds de prêt au 1^{er} octobre 2026.
- 3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,000$.
- 4) Prouver que la suite (u_n) est croissante.
- 5) Justifier que la suite (u_n) est convergente. *Sa limite et sa signification sont étudiées dans la partie B.*
- 6) La direction veut savoir à partir de combien de mois le fonds de prêt atteindra au moins 1 950 livres. Recopier et compléter la fonction Python ci-contre pour qu'elle renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 1\,950$, puis donner la valeur renvoyée.

```

1 def mois_seuil():
2     n = 0
3     u = 1200
4     while ..... :
5         n = .....
6         u = .....
7     return .....
```

Partie B

Désormais, a désigne un réel positif quelconque et on pose $u_0 = a$. On définit la suite (w_n) par $w_n = u_n - 2\,000$ pour tout entier naturel n .

- 7) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85 et préciser son premier terme.
- 8) Donner l'expression de w_n en fonction de n , puis en déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2\,000 + (a - 2\,000) \times 0,85^n.$$
- 9) Calculer la limite de la suite (u_n) . Dépend-elle du nombre initial a de livres ?
- 10) Étudier, suivant les valeurs de a , le sens de variation de la suite (u_n) .
- 11) Que signifient, pour le fonds de prêt de la médiathèque, les résultats des questions 9) et 10) ?

Indications

- A3. Écrire d'abord la propriété $\mathcal{P}(n)$ à démontrer, puis rédiger séparément les trois temps du raisonnement : initialisation, hérédité, conclusion.
- A4. Il suffit d'établir que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout entier naturel n .
- B7. Une suite (w_n) est géométrique de raison q lorsque $w_{n+1} = q w_n$ pour tout entier naturel n . Partir de $w_{n+1} = u_{n+1} - 2\,000$ et utiliser la relation de la question 1).