

Exercice 1

8 points

- a. $u_n = \frac{-7}{2n^3 + 3}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$, donc par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^3 = +\infty$ et par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^3 + 3) = +\infty$.
 Le numérateur est constant égal à -7 ; par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

- b. $u_n = \frac{5n + 3}{-n + 2}$, définie pour $n \neq 2$ (donc pour $n \geq 3$ quand on étudie la limite).
 Numérateur et dénominateur tendent vers l'infini : forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise par n ($n \geq 3$) :

$$u_n = \frac{n \left(5 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(-1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{5 + \frac{3}{n}}{-1 + \frac{2}{n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0$, donc par somme le numérateur tend vers 5 et le dénominateur vers -1 . Par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{-1} = -5.$$

- c. $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$: forme indéterminée « $-\infty + \infty$ ». Pour $n \geq 1$, on factorise par n^2 :

$$u_n = n^2 \left(-1 + \frac{\sqrt{n}}{n^2} \right) = n^2 \left(-1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right).$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0$ et la parenthèse tend vers -1 .

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, par produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

- d. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, définie pour $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$; en divisant par $n > 0$:

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes (théorème d'encadrement) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

e. $u_n = n - \cos(n)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n) \leq 1$, donc $-\cos(n) \geq -1$ et, en ajoutant n :

$$u_n = n - \cos(n) \geq n - 1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 1) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 2

12 points

1) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : « $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$ ».

Initialisation. $v_0 = 0,7$ et $v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944$.

On a bien $0,7 \leq 0,944 \leq 4$: $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} v_n &\leq v_{n+1} \leq 4 \\ \iff 0,92 v_n &\leq 0,92 v_{n+1} \leq 3,68 && \text{(on multiplie par } 0,92 > 0) \\ \iff 0,92 v_n + 0,3 &\leq 0,92 v_{n+1} + 0,3 \leq 3,98 && \text{(on ajoute } 0,3) \\ \iff v_{n+1} &\leq v_{n+2} \leq 3,98 \\ \implies v_{n+1} &\leq v_{n+2} \leq 4 && \text{(car } 3,98 \leq 4). \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est vraie : la propriété est héréditaire.

Conclusion. $P(0)$ est vraie et P est héréditaire, donc par récurrence :

$$v_n \leq v_{n+1} \leq 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $v_n \leq v_{n+1}$: la suite (v_n) est croissante ;
- $v_{n+1} \leq 4$ (et $v_0 = 0,7 \leq 4$) : la suite (v_n) est majorée par 4.

Une suite croissante et majorée converge (théorème de convergence monotone) : la suite (v_n) est **convergente**.

2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_{n+1} - 3,75 = 0,92 v_n + 0,3 - 3,75 = 0,92 v_n - 3,45 \\ &= 0,92 (v_n - 3,75) && \text{(car } 0,92 \times 3,75 = 3,45) \\ &= 0,92 u_n. \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc **géométrique de raison $q = 0,92$** , de premier terme

$$u_0 = v_0 - 3,75 = 0,7 - 3,75 = -3,05.$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = -3,05 \times 0,92^n$.

Comme $u_n = v_n - 3,75$, on a $v_n = u_n + 3,75$, soit :

$$v_n = 3,75 - 3,05 \times 0,92^n.$$

Vérification : $v_0 = 3,75 - 3,05 = 0,7$; $v_1 = 3,75 - 3,05 \times 0,92 = 3,75 - 2,806 = 0,944$.

c. $0 < 0,92 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,92^n = 0$. Par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3,05 \times 0,92^n = 0$ et, par somme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3,75.$$

3) À long terme, le taux de chlore se rapproche de $3,75 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Comme $3,75 > 3$, l'intervalle ouvert $]3; 4,5[$ contient $3,75$: par définition de la limite, il contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang. À partir de ce rang, $v_n > 3$.

À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation : il dépassera $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$ (la quantité de chlore ajoutée chaque jour est trop importante).

4) On calcule les termes successifs tant que le seuil n'est pas dépassé, c'est-à-dire tant que $v \leq s$:

```

1 def alerte_chlore(s):
2     n = 0
3     v = 0.7
4     while v <= s :
5         n = n + 1
6         v = 0.92*v + 0.3
7     return n

```

Remarque : « lorsqu'il existe » : comme $3,05 \times 0,92^n > 0$, on a $v_n < 3,75$ pour tout n ; pour $s \geq 3,75$, la condition reste toujours vraie et la boucle ne s'arrête pas.

5) L'exécution de `alerte_chlore(3)` renvoie `17`.

En effet, d'après la formule de la question 2)b. :

$$v_{16} = 3,75 - 3,05 \times 0,92^{16} \approx 2,947 \leq 3 \quad \text{et} \quad v_{17} = 3,75 - 3,05 \times 0,92^{17} \approx 3,011 > 3.$$

Interprétation : c'est 17 jours après le mercredi 19 juin, soit le samedi 6 juillet, que le taux de chlore dépasse pour la première fois $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, la limite haute préconisée par les piscinistes.