

Calculatrice autorisée

Exercice 1

8 points

Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

a. $u_n = \frac{-7}{2n^3 + 3}$

b. $u_n = \frac{5n + 3}{-n + 2}$

c. $u_n = -n^2 + \sqrt{n}$

d. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

e. $u_n = n - \cos(n)$

Exercice 2

12 points

Alain possède une piscine. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Le mercredi 19 juin, Alain mesure un taux de chlore de 0,70 $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une certaine quantité de chlore.

- 1) Pour tout entier naturel n , on note v_n le taux de chlore, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin.

Ainsi $v_0 = 0,7$. On admet que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. Justifier que la suite (v_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

- 2) On désigne par (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = v_n - 3,75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n = 3,75 - 3,05 \times 0,92^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

- 3) À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

- 4) Compléter l'algorithme ci-contre, écrit en Python, pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
1 def alerte_chlore(s):
2     n = 0
3     v = 0.7
4     while ..... :
5         n = n + 1
6         v = 0.92*v + 0.3
7     return n
```

- 5) Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.