

Exercice 1
7 points

1) On réduit au même dénominateur.

a. Pour $x \neq 0$, le dénominateur commun est $2x$:

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{x} + 2 = \frac{x \times x}{2x} + \frac{3 \times 2}{2x} + \frac{2 \times 2x}{2x} = \boxed{\frac{x^2 + 4x + 6}{2x}}.$$

Cette fraction est irréductible : $x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2$ n'a aucun facteur commun avec $2x$ (il ne s'annule pas en 0 et n'est pas divisible par 2).

b. Pour $x \neq 2$ et $x \neq -4$, le dénominateur commun est $(x - 2)(x + 4)$:

$$\frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x + 4} = \frac{3(x + 4) - (x - 2)}{(x - 2)(x + 4)} = \frac{3x + 12 - x + 2}{(x - 2)(x + 4)} = \boxed{\frac{2x + 14}{(x - 2)(x + 4)}}.$$

Le numérateur vaut $2(x + 7)$, sans facteur commun avec $(x - 2)(x + 4)$: la fraction est irréductible.

c. Pour x, y, z non nuls, le dénominateur commun est xyz :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{xy}{xyz} = \boxed{\frac{xy + xz + yz}{xyz}}.$$

2) On utilise $a^m \times a^p = a^{m+p}$, $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ et $(a^m)^p = a^{mp}$.

a. $(2^2)^{-4} = 2^{-8}$, donc

$$\frac{2^3 \times 2^{-8}}{2^{-5}} = \frac{2^{-5}}{2^{-5}} = 2^{-5-(-5)} = \boxed{2^0} (= 1).$$

b. $125 = 5^3$ et $\left(\frac{1}{5}\right)^5 = 5^{-5}$, donc

$$125 \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = 5^3 \times 5^{-5} = \boxed{5^{-2}}.$$

c. $27 = 3^3$ et $9 = 3^2$, donc $27^5 = 3^{15}$ et $9^7 = 3^{14}$:

$$\frac{27^5 \times 3^6}{9^7} = \frac{3^{15} \times 3^6}{3^{14}} = 3^{15+6-14} = \boxed{3^7}.$$

d. $(7^{n+3})^3 = 7^{3(n+3)} = 7^{3n+9}$, donc

$$\frac{(7^{n+3})^3}{7^{3n+2}} = 7^{3n+9-(3n+2)} = \boxed{7^7}.$$

Exercice 2

4 points

On fait apparaître le plus grand carré parfait sous chaque racine, puis on utilise $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour $a, b \geq 0$.

- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$, donc

$$A = 2\sqrt{2} + 5 \times 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = (2 + 10 - 3)\sqrt{2} = \boxed{9\sqrt{2}}.$$

- $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$ et $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$, donc

$$B = 5\sqrt{3} + 3 \times 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (5 + 6 - 4)\sqrt{3} = \boxed{7\sqrt{3}}.$$

- On reconnaît $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 3\sqrt{3}$ et $b = 1$:

$$C = \left(3\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 = 9 \times 3 - 1 = \boxed{26}.$$

- $\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = 3\sqrt{7}$ et $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$, donc

$$D = \frac{2 \times 3\sqrt{7}}{6 \times 2\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}}{12\sqrt{7}} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 3

3 points

- $3x^2 = (\sqrt{3}x)^2$ et $16 = 4^2$; le double produit vaut $2 \times \sqrt{3}x \times 4 = 8x\sqrt{3}$. On reconnaît $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = \sqrt{3}x$ et $b = 4$:

$$E = \left(\sqrt{3}x\right)^2 - 2 \times \sqrt{3}x \times 4 + 4^2 = \boxed{\left(\sqrt{3}x - 4\right)^2}.$$

Vérification : $(\sqrt{3}x - 4)^2 = 3x^2 - 8\sqrt{3}x + 16$.

- $6 = (\sqrt{6})^2$; on reconnaît $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = x$ et $b = \sqrt{6}$:

$$F = x^2 - (\sqrt{6})^2 = \boxed{(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})}.$$

Exercice 4

6 points

1) On développe chaque terme :

$$(3x + 1)(6x - 9) = 18x^2 - 27x + 6x - 9 = 18x^2 - 21x - 9$$

$$(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

Donc

$$D = 18x^2 - 21x - 9 - (4x^2 - 12x + 9) = 18x^2 - 21x - 9 - 4x^2 + 12x - 9 = \boxed{14x^2 - 9x - 18}.$$

2) On utilise la forme développée.

 • Pour $x = \frac{3}{2}$:

$$D = 14 \times \frac{9}{4} - 9 \times \frac{3}{2} - 18 = \frac{63}{2} - \frac{27}{2} - 18 = 18 - 18 = \boxed{0}.$$

 • Pour $x = \sqrt{2}$, comme $(\sqrt{2})^2 = 2$:

$$D = 14 \times 2 - 9\sqrt{2} - 18 = \boxed{10 - 9\sqrt{2}},$$

 soit $a = 10$ et $b = -9$.

 3) On remarque que $6x - 9 = 3(2x - 3)$. Ainsi

$$D = 3(3x + 1)(2x - 3) - (2x - 3)^2 = (2x - 3)[3(3x + 1) - (2x - 3)] = (2x - 3)(9x + 3 - 2x + 3),$$

donc

$$\boxed{D = (2x - 3)(7x + 6)}.$$

$$\text{Vérification : } (2x - 3)(7x + 6) = 14x^2 + 12x - 21x - 18 = 14x^2 - 9x - 18.$$

 4) L'équation s'écrit $D = 0$, c'est-à-dire $(2x - 3)(7x + 6) = 0$. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul :

$$(2x - 3)(7x + 6) = 0 \iff 2x - 3 = 0 \text{ ou } 7x + 6 = 0 \iff x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{6}{7}.$$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ -\frac{6}{7}; \frac{3}{2} \right\}}.$$

 On retrouve que $D = 0$ pour $x = \frac{3}{2}$ (question 2).