

Exercice 1

5 points

1) On applique la relation $u_{n+1} = 2u_n + 1$ de proche en proche, en partant de $u_0 = 1$:

$$u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = \boxed{3}, \quad u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 3 + 1 = \boxed{7}, \quad u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \times 7 + 1 = \boxed{15}.$$

2) a. On remplace n par 0, 1 puis 2 dans $v_n = 2n + 5$:

$$v_0 = 2 \times 0 + 5 = \boxed{5}, \quad v_1 = 2 \times 1 + 5 = \boxed{7}, \quad v_2 = 2 \times 2 + 5 = \boxed{9}.$$

b. On remplace n par $n + 1$ dans l'expression de v_n :

$$v_{n+1} = 2(n + 1) + 5 = 2n + 2 + 5 = \boxed{2n + 7}.$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule la différence de deux termes consécutifs :

$$v_{n+1} - v_n = (2n + 7) - (2n + 5) = 2.$$

Cette différence est constante (elle ne dépend pas de n) : la suite (v_n) est donc **arithmétique**, de premier terme $\boxed{v_0 = 5}$ et de raison $\boxed{r = 2}$.

Vérification : $v_1 - v_0 = 7 - 5 = 2$ et $v_2 - v_1 = 9 - 7 = 2$.

Exercice 2

3 points

1) On étudie le signe de $a_{n+1} - a_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n + 1)^2 + 4(n + 1) - (n^2 + 4n) \\ &= n^2 + 2n + 1 + 4n + 4 - n^2 - 4n \\ &= 2n + 5. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 0$, on a $2n + 5 \geq 5 > 0$, donc $a_{n+1} > a_n$ pour tout n : la suite (a_n) est **strictement croissante**.

Vérification : $a_0 = 0, a_1 = 5, a_2 = 12, a_3 = 21$; les écarts 5, 7, 9 valent bien $2n + 5$ pour $n = 0, 1, 2$.

2) Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$: la suite (b_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $b_1 = \frac{1}{3} > 0$. Tous ses termes sont donc strictement positifs.

Méthode 1 (raison) : une suite géométrique à termes strictement positifs dont la raison vérifie $0 < q < 1$ est strictement décroissante; ici $0 < \frac{1}{3} < 1$.

Méthode 2 (différence) : pour tout $n \geq 1$,

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0.$$

Dans les deux cas, la suite (b_n) est **strictement décroissante**.

Vérification : $b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{9}, b_3 = \frac{1}{27}$: les termes diminuent.

Exercice 3

4 points

- 1) Une suite arithmétique de premier terme w_0 et de raison r vérifie $w_n = w_0 + n r$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = 5 + 2n.$$

2) $w_{10} = 5 + 2 \times 10 = 5 + 20 = \boxed{25}$.

- 3) Les indices vont de 0 à 10 : la somme comporte $10 - 0 + 1 = 11$ termes (attention à ne pas oublier le terme de rang 0). Pour une suite arithmétique :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = 11 \times \frac{w_0 + w_{10}}{2},$$

$$S = 11 \times \frac{5 + 25}{2} = 11 \times 15 = \boxed{165}.$$

Exercice 4 : Coût de forage

4 points

- 1) Le coût augmente de 200 euros à chaque mètre supplémentaire : pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 200$. La suite (u_n) est donc **arithmétique**, de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $r = 200$. Son expression générale est

$$u_n = u_0 + n r, \quad \text{soit} \quad \boxed{u_n = 1\,000 + 200n}.$$

Vérification : $u_1 = 1\,200$ et $u_2 = 1\,400$, conformément à l'énoncé.

- 2) Le 15^e mètre correspond au rang $n = 14$, puisque u_n est le coût du $(n + 1)$ ^e mètre :

$$u_{14} = 1\,000 + 200 \times 14 = 1\,000 + 2\,800 = 3\,800.$$

Le 15^e mètre creusé coûte $\boxed{3\,800 \text{ euros}}$.

- 3) On résout l'équation $u_n = 5\,000$:

$$1\,000 + 200n = 5\,000 \iff 200n = 4\,000 \iff n = \frac{4\,000}{200} \iff n = 20.$$

Attention au décalage d'indice : u_{20} est le coût du $(20 + 1)$ ^e mètre. Le coût individuel du mètre atteint 5 000 euros pour le $\boxed{21^{\text{e}} \text{ mètre creusé}}$.

Vérification : $u_{19} = 1\,000 + 200 \times 19 = 4\,800$ (20^e mètre) et $u_{20} = 1\,000 + 200 \times 20 = 5\,000$ (21^e mètre).

Exercice 5

4 points

- 1) On applique la relation de récurrence en partant de $u_0 = 15$:

$$u_1 = 0,8 \times u_0 + 2 = 0,8 \times 15 + 2 = 12 + 2 = \boxed{14},$$

$$u_2 = 0,8 \times u_1 + 2 = 0,8 \times 14 + 2 = 11,2 + 2 = \boxed{13,2}.$$

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ &= 0,8 u_n + 2 - 10 \\ &= 0,8 u_n - 8 \\ &= 0,8 (u_n - 10) \quad (\text{car } 0,8 \times 10 = 8) \\ &= 0,8 v_n. \end{aligned}$$

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par 0,8 : la suite (v_n) est **géométrique** de raison $q = 0,8$. Son premier terme est $v_0 = u_0 - 10 = 15 - 10$, soit $\boxed{v_0 = 5}$.

Vérification : $v_1 = u_1 - 10 = 4 = 0,8 \times 5$ et $v_2 = u_2 - 10 = 3,2 = 0,8 \times 4$.

- 3) Une suite géométrique vérifie $v_n = v_0 \times q^n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_n = 5 \times 0,8^n}.$$

Comme $v_n = u_n - 10$, on a $u_n = v_n + 10$, d'où

$$\boxed{u_n = 10 + 5 \times 0,8^n}.$$

Vérification : $u_0 = 10 + 5 \times 1 = 15$ et $u_2 = 10 + 5 \times 0,64 = 13,2$.

- 4) La raison 0,8 est comprise strictement entre 0 et 1 : les puissances $0,8^n$ deviennent aussi proches de 0 que l'on veut lorsque n devient grand, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. On en déduit que $5 \times 0,8^n$ tend vers 0, puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10 + 0 = \boxed{10}.$$

Illustration à la calculatrice : $u_{10} = 10 + 5 \times 0,8^{10} \approx 10,54$ et $u_{30} = 10 + 5 \times 0,8^{30} \approx 10,006$: les termes se rapprochent de 10 en restant au-dessus, puisque $5 \times 0,8^n > 0$.