

Exercice 1 : Un tour de l'année en cinq questions

5 points

Question 1

- a. Le coefficient multiplicateur global sur les 6 années est $\frac{0,24}{0,15} = 1,6$. Le coefficient annuel moyen c vérifie $c^6 = 1,6$, soit $c = 1,6^{1/6} \approx 1,0815$.
Le taux annuel moyen est d'environ $\boxed{8,1\%}$.
- b. De 2025 à 2028, il y a 3 ans : $0,24 \times (1,6^{1/6})^3 = 0,24 \times \sqrt{1,6} \approx 0,3036$, soit environ $\boxed{0,30 \text{ euro}}$ (même résultat avec le taux arrondi : $0,24 \times 1,081^3 \approx 0,303$).

Question 2

$x \mapsto \frac{8}{x+1}$ est la composée de $x \mapsto x+1$ (de dérivée 1) par $X \mapsto \frac{8}{X}$ (de dérivée $-\frac{8}{X^2}$). Donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2 - 8}{(x+1)^2} = \frac{2[(x+1)^2 - 2^2]}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{2(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

Sur $[0; 5]$, $x+3 > 0$ et $(x+1)^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x-1$. f est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; 5]$. Le minimum est $f(1) = 2 + 4 = \boxed{6}$, atteint en $x = 1$ (avec $f(0) = 8$ et $f(5) = \frac{34}{3}$).

Question 3

- a. $G = e^u$ avec $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x + 1$. Comme $(e^u)' = u'e^u$, $G'(x) = (2x + 1)e^{x^2+x} = g(x)$:
 G est une primitive de g .
- b. $I = G(1) - G(0) = e^2 - e^0 = \boxed{e^2 - 1} \approx \boxed{6,39}$.

Question 4

La calculatrice donne $a = 0,111$ et $b = 7,11$: $\boxed{C = 0,111v + 7,110}$.

Pour $v = 100$: $C = 11,1 + 7,11 = 18,21$, soit environ $\boxed{18,2 \text{ kWh/100 km}}$.

Question 5

- a. $-\log([H_3O^+]) = 5,6 \iff [H_3O^+] = 10^{-5,6} \approx \boxed{2,5 \times 10^{-6} \text{ mol/L}}$.
- b. $\frac{10^{-4,6}}{10^{-5,6}} = 10^{-4,6+5,6} = 10^1$: la concentration est $\boxed{\text{multipliée par } 10}$. Une baisse d'une unité de pH correspond à une concentration dix fois plus grande.

Exercice 2 : Les trois phases du réseau électrique

5 points

1) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$z_2 = 230 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \boxed{-115 - 115\sqrt{3}i} \quad \text{et} \quad z_3 = \overline{z_2} = \boxed{-115 + 115\sqrt{3}i}.$$

2) $z_1 + z_2 + z_3 = (230 - 115 - 115) + (-115\sqrt{3} + 115\sqrt{3})i = \boxed{0}$.

3) $z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times z_1$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}} \times z_2 = 230 e^{-i\frac{4\pi}{3}} = 230 e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_3$ (car $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$).

L'application $z \mapsto e^{-i\frac{2\pi}{3}} z$, multiplication par un complexe de module 1, est la rotation de centre O et d'angle $\boxed{-\frac{2\pi}{3}}$: elle envoie A sur B et B sur C .

4) a. $z_1 - z_2 = 230 + 115 + 115\sqrt{3}i = \boxed{345 + 115\sqrt{3}i}$.

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{345^2 + (115\sqrt{3})^2} = \sqrt{119025 + 39675} = \sqrt{158700} = \sqrt{3 \times 230^2} = \boxed{230\sqrt{3}}.$$

b. Un argument φ vérifie $\cos \varphi = \frac{345}{230\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \varphi = \frac{115\sqrt{3}}{230\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{6}$:

$$\boxed{z_1 - z_2 = 230\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}}.$$

Entre une phase et le neutre, la tension efficace est 230 V ; entre deux phases, elle vaut $230\sqrt{3} \approx 398$ V, soit environ 400 V : d'où l'appellation « 230 V / 400 V ».

5) a. Avec $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ et $\omega = 100\pi$:

$$u_2(t) = U \left[\cos(\omega t) \cos \frac{2\pi}{3} + \sin(\omega t) \sin \frac{2\pi}{3} \right] = U \left[-\frac{1}{2} \cos(\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) \right],$$

$$\text{donc } u_1(t) - u_2(t) = U \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) \right] = \boxed{U \left(\frac{3}{2} \cos(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) \right)}.$$

b. Avec $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$:

$$\begin{aligned} U\sqrt{3} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) &= U\sqrt{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t) - \frac{1}{2} \sin(\omega t) \right] \\ &= U \left(\frac{3}{2} \cos(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\omega t) \right) = u_1(t) - u_2(t). \end{aligned}$$

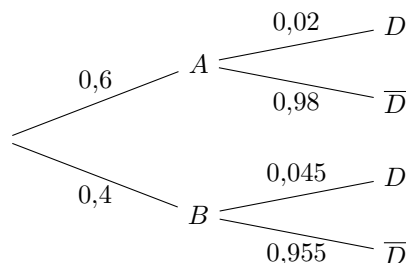
Cohérence : l'amplitude $U\sqrt{3} = 230\sqrt{3} \times \sqrt{2}$ correspond à une valeur efficace $230\sqrt{3}$, le module trouvé en 4.a, et la phase $\frac{\pi}{6}$ est l'argument trouvé en 4.b.

Exercice 3 : Les détecteurs de fumée d'une résidence étudiante

5 points

Partie A

- 1) Arbre pondéré (les probabilités conditionnelles sont sur les branches du second niveau) :



- 2) A et B forment une partition ; d'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,045 = 0,012 + 0,018 = 0,03$.
- 3) $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,012}{0,03} = 0,4$.
- 4) $P_A(D) = 0,02 \neq P(D) = 0,03$: A et D ne sont pas indépendants. Le fournisseur influe sur la fiabilité.

Partie B

- 1) On répète 8 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli dont le succès « le détecteur est défaillant » a pour probabilité 0,03. X compte les succès : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(8; 0,03)$.
- 2) $P(X = 0) = 0,97^8 \approx 0,7837$ et $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,2163$.
Dans plus d'un couloir sur cinq, au moins un détecteur est défaillant : le contrôle annuel de chaque couloir est indispensable.
- 3) Le coefficient binomial $\binom{8}{2}$ vaut 28 (troisième terme de la ligne) : $P(X = 2) = 28 \times 0,03^2 \times 0,97^6 \approx 0,0210$.
- 4) $E(X) = np = 8 \times 0,03 = 0,24$: en moyenne 0,24 détecteur défaillant par couloir. Pour 25 couloirs : $25 \times 0,24 = 6$ détecteurs de rechange en moyenne.

Exercice 4 : Deux documents sur un poêle de masse

5 points

- 1) Les solutions de $y' = ay + b$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{at} - \frac{b}{a}$. Ici $-\frac{1,6}{-0,08} = 20$:
 $y(t) = Ce^{-0,08t} + 20$, $C \in \mathbb{R}$.
 $\theta(0) = 260 \iff C + 20 = 260 \iff C = 240$, donc $\theta(t) = 20 + 240e^{-0,08t}$.
- 2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,08t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 20$: le bloc refroidit jusqu'à la température de la pièce.

3) Le bloc est au-dessus de 100 °C tant que

$$20 + 240 e^{-0,08t} \geq 100 \iff e^{-0,08t} \geq \frac{1}{3} \iff -0,08t \geq -\ln(3) \iff t \leq \frac{\ln(3)}{0,08} \approx 13,7.$$

Selon le bureau d'études, le bloc ne reste au-dessus de 100 °C que 13,7 heures environ, et $\theta(18) = 20 + 240 e^{-1,44} \approx 77^{\circ}\text{C}$. **Les deux documents ne sont pas cohérents** : la brochure surestime la durée de plus de 4 heures.

4) Avec $\theta(0) = \theta_0$, la solution est $\theta(t) = 20 + (\theta_0 - 20) e^{-0,08t}$.

$$\theta(18) = 100 \iff (\theta_0 - 20) e^{-1,44} = 80 \iff \theta_0 = 20 + 80 e^{1,44} \approx 357,7.$$

Il faudrait porter le bloc à environ 358 °C en fin de flambée, au lieu de 260 °C.

5) Une primitive de $t \mapsto 20 + 240 e^{-0,08t}$ est $t \mapsto 20t - 3\,000 e^{-0,08t}$ (car $\frac{240}{-0,08} = -3\,000$).

$$\bar{\theta} = \frac{1}{12} \left[20t - 3\,000 e^{-0,08t} \right]_0^{12} = \frac{1}{12} (240 - 3\,000 e^{-0,96} + 3\,000) = 270 - 250 e^{-0,96} \approx 174^{\circ}\text{C}.$$