



Calculatrice autorisée (mode examen)

Partie mathématiques de l'épreuve de spécialité, au format du bac STI2D, notée sur 20.

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1 : Un tour de l'année en cinq questions

5 points

Les questions 1 à 5 sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

Dans une copropriété, le prix du kilowattheure d'électricité est passé de 0,15 euro en 2019 à 0,24 euro en 2025.

- Calculer le taux d'évolution annuel moyen du prix entre 2019 et 2025, arrondi à 0,1 %.
- Si ce taux se maintenait, quel serait le prix du kilowattheure en 2028, arrondi au centime ?

Question 2

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par $f(x) = 2x + \frac{8}{x+1}$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 5]$, $f'(x) = \frac{2(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$, puis déterminer le minimum de f sur $[0 ; 5]$.

Question 3

- Justifier que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = e^{x^2+x}$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$.
- En déduire la valeur exacte de $I = \int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x} dx$, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Question 4

Un essai sur circuit a donné la consommation C d'une voiture électrique, en kWh pour 100 km, selon sa vitesse stabilisée v , en km/h :

Vitesse v (km/h)	50	70	90	110	130
Consommation C (kWh/100 km)	13,0	14,6	16,9	19,1	21,8

À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de C en v obtenue par la méthode des moindres carrés (coefficients arrondis à 10^{-3}), puis estimer la consommation à 100 km/h, arrondie à 0,1 kWh/100 km.

Question 5

Le pH d'une solution aqueuse est donné par $\text{pH} = -\log([H_3O^+])$, où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions oxonium, en mol/L.

- Une eau de pluie non polluée a un pH de 5,6. Calculer sa concentration en ions oxonium (écriture scientifique, deux chiffres significatifs).
- Une pluie acide a un pH de 4,6. Par combien sa concentration en ions oxonium est-elle multipliée par rapport à la pluie non polluée ? Justifier.

Exercice 2 : Les trois phases du réseau électrique

5 points

Le réseau de distribution délivre trois tensions sinusoïdales de même valeur efficace 230 V, décalées d'un tiers de période. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on les représente par les points A, B et C d'affixes

$$z_1 = 230, \quad z_2 = 230 e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_3 = 230 e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

- 1) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.
- 2) Montrer que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
- 3) Justifier que B est l'image de A , et C l'image de B , par une même rotation de centre O dont on précisera l'angle.
- 4) La tension entre deux phases, appelée tension composée, est représentée par $z_1 - z_2$.
 - a. Écrire $z_1 - z_2$ sous forme algébrique, puis montrer que $|z_1 - z_2| = 230\sqrt{3}$.
 - b. En déduire une forme exponentielle de $z_1 - z_2$. Expliquer pourquoi on parle d'un réseau « 230 V / 400 V ».
- 5) On revient aux tensions instantanées. Pour tout $t \geq 0$, en secondes, $u_1(t) = U \cos(100\pi t)$ et $u_2(t) = U \cos\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$, avec $U = 230\sqrt{2}$.
 - a. À l'aide d'une formule d'addition, montrer que

$$u_1(t) - u_2(t) = U \left(\frac{3}{2} \cos(100\pi t) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(100\pi t) \right).$$

- b. Montrer que $u_1(t) - u_2(t) = U\sqrt{3} \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ et vérifier la cohérence avec la question 4.

Exercice 3 : Les détecteurs de fumée d'une résidence étudiante

5 points

Les probabilités seront arrondies à 10^{-4} près.

Partie A

Le gestionnaire d'une résidence étudiante achète 60 % de ses détecteurs de fumée chez un fournisseur A et les autres chez un fournisseur B . Au contrôle annuel, 2 % des détecteurs du fournisseur A et 4,5 % de ceux du fournisseur B sont défectueux. On choisit un détecteur au hasard et on note A l'événement « il provient du fournisseur A », B l'événement « il provient du fournisseur B » et D l'événement « il est défectueux ».

- 1) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- 2) Montrer que $P(D) = 0,03$.
- 3) Le détecteur choisi est défectueux. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur A .
- 4) Les événements A et D sont-ils indépendants? Justifier.

Partie B

Un couloir de la résidence est équipé de 8 détecteurs. On admet que chacun est défectueux avec la probabilité 0,03, indépendamment des autres. On note X le nombre de détecteurs défectueux du couloir.

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 1)$. Interpréter $P(X \geq 1)$.
- 3) On donne la ligne $n = 8$ du triangle de Pascal : 1 8 28 56 70 56 28 8 1. Calculer la probabilité qu'exactement deux détecteurs du couloir soient défectueux.
- 4) Calculer l'espérance de X . La résidence compte 25 couloirs identiques : combien de détecteurs de rechange le gestionnaire doit-il prévoir, en moyenne, à chaque contrôle annuel ?

Exercice 4 : Deux documents sur un poêle de masse

5 points

Un poêle de masse accumule la chaleur d'une flambée dans un épais bloc de pierre (la stéatite), puis la restitue lentement à la pièce.

Document 1 – Brochure du fabricant
« Après une flambée de deux heures, le bloc de stéatite reste au-dessus de 100°C pendant 18 heures : une seule flambée par jour suffit. »

Document 2 – Note du bureau d'études
On note $\theta(t)$ la température moyenne du bloc, en $^\circ\text{C}$, t heures après la fin de la flambée, la pièce étant maintenue à 20°C . La fonction θ est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,08y + 1,6$, avec $\theta(0) = 260$.

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E), puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $\theta(t) = 20 + 240e^{-0,08t}$.
- 2) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t)$ et interpréter ce résultat.
- 3) Les deux documents sont-ils cohérents ? Justifier par des calculs (les durées seront arrondies au dixième d'heure, les températures au degré).
- 4) Le fabricant veut garder son affirmation en conseillant une flambée plus longue. En conservant l'équation (E), quelle température initiale $\theta(0)$ faudrait-il atteindre pour que le bloc soit encore à 100°C au bout de 18 heures ? Arrondir au degré.
- 5) Calculer la valeur exacte de la température moyenne du bloc pendant les 12 heures qui suivent la flambée, puis sa valeur arrondie au degré.