

Exercice 1 : L'éolienne d'un refuge de montagne (QCM)

5 points

1) **Réponse B.** Les solutions de $y' = -0,5y + 15$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0,5t} + \frac{15}{0,5} = Ce^{-0,5t} + 30$, avec C réel. La condition $\omega(0) = 0$ donne $C + 30 = 0$, soit $C = -30$: $\omega(t) = 30 - 30e^{-0,5t}$. Les autres propositions échouent : A et D donnent $\omega(0) = 30$ et $\omega'(0) = 60$; pour C, $\omega'(t) = 7,5e^{-0,5t}$ alors que $-0,5\omega(t) + 15 = 7,5 + 7,5e^{-0,5t}$.

2) **Réponse A.** Une primitive de $t \mapsto 30 - 30e^{-0,5t}$ est $t \mapsto 30t + 60e^{-0,5t}$, donc

$$\frac{1}{10-0} \int_0^{10} \omega(t) dt = \frac{1}{10} [30t + 60e^{-0,5t}]_0^{10} = \frac{1}{10} (300 + 60e^{-5} - 60) = \boxed{24 + 6e^{-5}} \approx 24,04.$$

(D est l'intégrale sans la division par 10.)

3) **Réponse C.** Une primitive de P est $t \mapsto 0,1t^2 - t$:

$$\int_8^{12} P(t) dt = (0,1 \times 144 - 12) - (0,1 \times 64 - 8) = 2,4 - (-1,6) = \boxed{4 \text{ kWh}}.$$

Contrôle : P est affine, l'intégrale est l'aire d'un trapèze de bases $P(8) = 0,6$ et $P(12) = 1,4$ et de hauteur 4 : $\frac{0,6 + 1,4}{2} \times 4 = 4$.

4) **Réponse D.** Au bout de n années, la capacité est multipliée par $0,98^n$. On cherche le plus petit entier n tel que

$$0,98^n < 0,8 \iff n \ln(0,98) < \ln(0,8) \iff n > \frac{\ln(0,8)}{\ln(0,98)} \approx 11,05$$

(le sens change car $\ln(0,98) < 0$). Donc $\boxed{n = 12}$. Piège de la réponse A : $0,98^{11} \approx 0,8007$, encore au-dessus de 0,8.

5) **Réponse B.** Pour $v = 8$, $x = 8^3 = 512$ et $P = 0,6 \times 512 + 5 = \boxed{312,2 \text{ W}}$. (A oublie le cube, D remplace le cube par le carré, C oublie l'ordonnée à l'origine.)

Clé : B – A – C – D – B.

Exercice 2 : L'aération d'une salle de classe

6 points

1) Variations successives (en ppm) : -690 ; -390 ; -220 ; -115 ; -65 .

Les relevés sont régulièrement espacés (toutes les 5 minutes) mais les variations de C ne sont pas du tout constantes : la concentration baisse de moins en moins vite. Les points du nuage ne sont pas alignés : **un ajustement affine n'est pas adapté.**

2) Valeurs de $\ln(C - 420)$ arrondies à 10^{-2} :

t	0	5	10	15	20	25
$y = \ln(C - 420)$	7,35	6,77	6,17	5,56	4,98	4,38

3) La calculatrice donne $a \approx -0,119\,03$ et $b \approx 7,356\,2$, soit $y = -0,1190t + 7,356$.

4) $\ln(C - 420) = -0,119t + 7,356$, donc $C - 420 = e^{7,356} \times e^{-0,119t}$.
Avec $e^{7,356} \approx 1\,565,6$: $C \approx 420 + 1\,566 e^{-0,119t}$.

5) $C'(t) = 1\,566 \times (-0,119) e^{-0,119t} < 0$: C est décroissante, et

$$\begin{aligned} C(t) < 800 &\iff 1\,566 e^{-0,119t} < 380 \iff -0,119t < \ln\left(\frac{380}{1\,566}\right) \\ &\iff t > \frac{1}{0,119} \ln\left(\frac{1\,566}{380}\right) \approx 11,9. \end{aligned}$$

La concentration passe sous 800 ppm au bout d'environ 12 minutes.

6) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,119t} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 420$: fenêtres ouvertes, l'air de la salle tend vers la composition de l'air extérieur.

C'est l'écart $C - 420$ à la valeur extérieure qui décroît exponentiellement vers 0 ; C elle-même tend vers 420 et non vers 0, donc $\ln(C)$ ne serait pas une fonction affine de t (elle tendrait vers $\ln(420)$). Le changement de variable $y = \ln(C - 420)$ rend le nuage aligné.

Exercice 3 : La crue d'une rivière après un orage

5 points

1) $Q(0) = 20 + 0 = 20$: au début de l'orage, la rivière a son débit habituel de $20\text{ m}^3/\text{s}$.

2) a. Avec $u(t) = 30t$ et $w(t) = e^{-0,5t}$, $u'(t) = 30$ et $w'(t) = -0,5 e^{-0,5t}$:

$$Q'(t) = 30 e^{-0,5t} + 30t \times (-0,5 e^{-0,5t}) = (30 - 15t) e^{-0,5t} = 15(2 - t) e^{-0,5t}.$$

b. $15 e^{-0,5t} > 0$: $Q'(t)$ a le signe de $2 - t$. Q est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 24]$.

Le débit est maximal à $t = 2\text{ h}$ et vaut $Q(2) = 20 + 60 e^{-1} \approx 42,1\text{ m}^3/\text{s}$.

3) $F'(t) = 20 - 60 [1 \times e^{-0,5t} + (t + 2) (-0,5 e^{-0,5t})] = 20 - 60 (1 - 0,5t - 1) e^{-0,5t} = 20 + 30t e^{-0,5t} = Q(t)$.

Donc F est bien une primitive de Q sur $[0 ; 24]$.

4) $F(12) = 240 - 60 \times 14 e^{-6} = 240 - 840 e^{-6}$ et $F(0) = -120$.

$$\overline{Q} = \frac{1}{12} \int_0^{12} Q(t) dt = \frac{F(12) - F(0)}{12} = \frac{360 - 840 e^{-6}}{12} = 30 - 70 e^{-6} \approx 29,83\text{ m}^3/\text{s}.$$

5) Douze heures font $12 \times 3\,600 = 43\,200\text{ s}$. Le volume écoulé est $43\,200 \times \overline{Q} \approx 1\,288\,504\text{ m}^3$, soit environ $1\,289\,000\text{ m}^3$.

Au débit habituel, il se serait écoulé $20 \times 43\,200 = 864\,000\text{ m}^3$. La part due à l'orage est d'environ $1\,288\,504 - 864\,000 \approx 425\,000\text{ m}^3$, soit environ un tiers du volume (33 %). C'est l'aire comprise entre la courbe et la droite d'équation $y = 20$ sur $[0 ; 12]$, multipliée par 3 600.

Exercice 4 : La descente d'une radiosonde sous parachute

4 points

- 1) Une fonction constante $y = c$ a une dérivée nulle : $0 = -0,8c + 4 \iff c = 5$.

C'est la **vitesse limite** de chute : 5 m/s, la vitesse vers laquelle la sonde se stabilise sous son parachute.

- 2) Les solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions $t \mapsto Ce^{at} - \frac{b}{a}$: ici $y(t) = Ce^{-0,8t} + 5$, $C \in \mathbb{R}$.

$$v(0) = 25 \iff C + 5 = 25 \iff C = 20, \text{ donc } v(t) = 5 + 20e^{-0,8t}.$$

3)

$$v(t) < 5,5 \iff 20e^{-0,8t} < 0,5 \iff e^{-0,8t} < 0,025 \iff -0,8t < \ln(0,025) \iff t > \frac{\ln(40)}{0,8}$$

$$\text{car } \ln(0,025) = -\ln(40). \text{ La vitesse passe sous } 5,5 \text{ m/s à partir de } t = 1,25 \ln(40) \approx 4,6 \text{ s}.$$

- 4) Une primitive de v est $t \mapsto 5t - 25e^{-0,8t}$ (car $\frac{20}{-0,8} = -25$).

$$d = \left[5t - 25e^{-0,8t} \right]_0^{10} = (50 - 25e^{-8}) - (-25) = 75 - 25e^{-8} \approx 75 \text{ m}.$$

Le terme $25e^{-8} \approx 0,008$ est négligeable : après quelques secondes, la sonde descend pratiquement à 5 m/s.