

Calculatrice autorisée (mode examen)

Partie mathématiques de l'épreuve de spécialité, au format du bac STI2D, notée sur 20.

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1 : L'éolienne d'un refuge de montagne (QCM)**5 points**

Une petite éolienne alimente en électricité un refuge de montagne.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, **en expliquant ce choix**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- 1) Au démarrage, la vitesse de rotation du rotor, en radians par seconde, est une fonction ω du temps t , en secondes, qui vérifie $\omega' = -0,5\omega + 15$ et $\omega(0) = 0$. Pour tout $t \geq 0$:
A. $\omega(t) = 30e^{-0,5t}$ **B.** $\omega(t) = 30 - 30e^{-0,5t}$ **C.** $\omega(t) = 15 - 15e^{-0,5t}$ **D.** $\omega(t) = 30 + 30e^{-0,5t}$
- 2) La valeur moyenne de la fonction ω de la question 1 sur l'intervalle $[0 ; 10]$ est :
A. $24 + 6e^{-5}$ **B.** $30 - 30e^{-5}$ **C.** 15 **D.** $240 + 60e^{-5}$
- 3) Un matin, entre 8 h et 12 h, la puissance fournie par l'éolienne, en kilowatts, est modélisée par $P(t) = 0,2t - 1$, où t est l'heure de la journée. L'énergie produite pendant ces quatre heures, en kilowattheures, est égale à $\int_8^{12} P(t) dt$, soit :
A. 1 kWh **B.** 1,4 kWh **C.** 4 kWh **D.** 8 kWh
- 4) La batterie qui stocke l'énergie perd 2 % de sa capacité chaque année. Elle doit être remplacée dès que sa capacité devient inférieure à 80 % de sa capacité initiale. Elle sera remplacée au bout de :
A. 11 ans **B.** 10 ans **C.** 20 ans **D.** 12 ans
- 5) On a relevé la puissance P fournie, en watts, pour six vitesses du vent v , en m/s. On pose $x = v^3$. La calculatrice donne, pour l'ajustement de P en x par la méthode des moindres carrés, la droite d'équation $P = 0,6x + 5$. Selon cet ajustement, pour un vent de 8 m/s, l'éolienne fournit environ :
A. 9,8 W **B.** 312,2 W **C.** 307,2 W **D.** 43,4 W

Exercice 2 : L'aération d'une salle de classe**6 points**

Un capteur mesure la concentration en dioxyde de carbone (CO_2) de l'air d'une salle de classe, en parties par million (ppm). À la fin d'un cours, on ouvre en grand les fenêtres et on relève la concentration C , t minutes après l'ouverture :

Temps t (min)	0	5	10	15	20	25
Concentration C (ppm)	1 980	1 290	900	680	565	500

La concentration en CO_2 de l'air extérieur est de 420 ppm.

- 1) Calculer les variations successives de la concentration entre deux relevés consécutifs. Expliquer pourquoi un ajustement affine de C en t n'est pas adapté.



2) On pose $y = \ln(C - 420)$. Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant à 10^{-2} .

t	0	5	10	15	20	25
$y = \ln(C - 420)$						

3) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = at + b$ (a arrondi à 10^{-4} , b arrondi à 10^{-3}).

Dans la suite, on retient l'ajustement $y = -0,119t + 7,356$.

4) En déduire une expression de C de la forme $C = 420 + k e^{-0,119t}$, où k est un réel à arrondir à l'unité.

On modélise désormais la concentration par $C(t) = 420 + 1\,566 e^{-0,119t}$.

5) Il est recommandé de ne pas dépasser 800 ppm dans une salle occupée. Déterminer par le calcul au bout de combien de minutes, arrondi à la minute, la concentration passe sous ce seuil.

6) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ et interpréter ce résultat. Expliquer pourquoi le changement de variable porte sur $C - 420$ et non sur C .

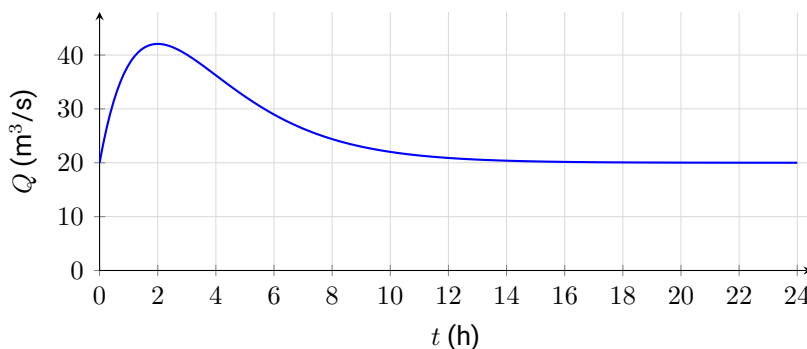
Exercice 3 : La crue d'une rivière après un orage

5 points

Après un violent orage, le débit d'une rivière, en m^3 par seconde, est modélisé en fonction du temps t , en heures, écoulé depuis le début de l'orage, par la fonction Q définie sur $[0 ; 24]$ par

$$Q(t) = 20 + 30t e^{-0,5t}.$$

Sa courbe représentative est tracée ci-dessous.



1) Calculer $Q(0)$ et interpréter ce résultat dans le contexte.

2) a. Montrer que, pour tout $t \in [0 ; 24]$, $Q'(t) = 15(2 - t) e^{-0,5t}$.

b. En déduire le sens de variation de Q sur $[0 ; 24]$. Préciser à quel instant le débit est maximal, et la valeur exacte de ce débit maximal, puis sa valeur arrondie à 0,1 près.

3) Montrer que la fonction F définie sur $[0 ; 24]$ par $F(t) = 20t - 60(t + 2) e^{-0,5t}$ est une primitive de Q sur $[0 ; 24]$.

4) Calculer la valeur exacte du débit moyen de la rivière pendant les 12 premières heures, puis sa valeur arrondie à 0,01 près.

5) En déduire le volume d'eau écoulé pendant ces 12 heures, arrondi au millier de m^3 . Quelle part de ce volume est due à l'orage, si l'on considère que le débit habituel de la rivière est de $20 \text{ m}^3/\text{s}$?

Exercice 4 : La descente d'une radiosonde sous parachute

4 points

Une radiosonde météorologique, emportée en altitude par un ballon, redescend sous un parachute après l'éclatement du ballon. Près du sol, on note $v(t)$ sa vitesse de chute, en m/s, t secondes après l'instant où elle vaut 25 m/s. La fonction v est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,8y + 4,$$

où y est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

- 1) Déterminer la fonction constante solution de (E) . Que représente-t-elle pour la radiosonde ?
- 2) Déterminer les solutions de (E) , puis montrer que $v(t) = 5 + 20e^{-0,8t}$.
- 3) Déterminer par le calcul à partir de quel instant la vitesse de chute devient inférieure à 5,5 m/s. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au dixième de seconde.
- 4) La distance parcourue par la radiosonde, en mètres, pendant les 10 premières secondes est $d = \int_0^{10} v(t) dt$. Calculer la valeur exacte de d , puis sa valeur arrondie au mètre.