

Exercice 1 : Composées, logarithmes et ordres de grandeur

4 points

Question 1

a. $f = v \circ u$ avec $u(x) = x^2 + 4$ (définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[4; +\infty[$) et $v(X) = \frac{1}{X}$ (définie sur $]0; +\infty[$).

b. $u'(x) = 2x$ et $v'(X) = -\frac{1}{X^2}$. D'après $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$:

$$f'(x) = 2x \times \left(-\frac{1}{(x^2 + 4)^2} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)^2}.$$

Le dénominateur est strictement positif : $f'(x)$ a le signe de $-2x$, positif sur $] -\infty ; 0]$ et négatif sur $[0 ; +\infty[$. Donc f est croissante sur $] -\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un maximum $f(0) = \frac{1}{4}$.

Question 2

a. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} 2 \ln(x) + \ln(3) = \ln(48) &\iff \ln(3x^2) = \ln(48) \iff 3x^2 = 48 \\ &\iff x^2 = 16 \iff x = 4 \quad (\text{car } x > 0). \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{4\}$.

b. $3e^{-0,2x} = 0,6 \iff e^{-0,2x} = 0,2 \iff -0,2x = \ln(0,2) \iff x = -5 \ln(0,2) = 5 \ln(5)$.

La solution est $x = 5 \ln(5) \approx 8,05$.

Question 3

a. $g = uv$ avec $u(x) = 2x + 1$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$:

$$g'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1)(-e^{-x}) = (2 - 2x - 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, $g'(x)$ a le signe de $1 - 2x$: positif sur $[0; \frac{1}{2}]$, négatif sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$. On a $g(0) = 1$ et $g(\frac{1}{2}) = 2e^{-1/2} \approx 1,21$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
g	1	$2e^{-1/2}$	0

b. $g(x) = 2xe^{-x} + e^{-x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Question 4

$\log(2^{128}) = 128 \log(2) \approx 38,53$. Donc $38 \leq \log(2^{128}) < 39$, c'est-à-dire $10^{38} \leq 2^{128} < 10^{39}$ (la fonction $x \mapsto 10^x$ est croissante). Un nombre compris entre 10^{38} et 10^{39} s'écrit avec 39 chiffres.

Exercice 2 : Le plan de plantation d'arbres d'une métropole

6 points

1) $u_1 = 500 + 80 = \text{580}$, $v_1 = 400 \times 1,15 = \text{460}$, $v_2 = 460 \times 1,15 = \text{529}$.

2) On ajoute 80 chaque année : (u_n) est **arithmétique** de raison 80 et $u_n = 500 + 80n$.
Augmenter de 15 % revient à multiplier par 1,15 : (v_n) est **géométrique** de raison 1,15 et $v_n = 400 \times 1,15^n$.

3) Tableau de valeurs de la calculatrice :

n	5	6	7	8
u_n	900	980	1 060	1 140
v_n (arrondi)	804,5	925,2	1 064,0	1 223,6

$v_6 < u_6$ mais $v_7 > u_7$ (de justesse : 1 064 contre 1 060). C'est en $2027 + 7 = \text{2034}$ que le programme B plante pour la première fois plus d'arbres que le A.

4) a. Les dix années correspondent à $n = 0$ à $n = 9$, avec $u_9 = 500 + 720 = 1 220$. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$\sum_{k=0}^9 u_k = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2} = 10 \times \frac{500 + 1 220}{2} = \text{8 600 arbres}.$$

b. Somme de dix termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 400 et de raison 1,15 :

$$\sum_{k=0}^9 v_k = 400 \times \frac{1 - 1,15^{10}}{1 - 1,15} = 400 \times \frac{1,15^{10} - 1}{0,15} \approx \text{8 121 arbres}.$$

5) À chaque tour de boucle, on passe au terme suivant en multipliant par 1,15 :

$$v = v * 1.15$$

La boucle s'exécute 10 fois et ajoute $v_0, v_1, \dots, v_9$: `total_B(10)` renvoie 8 121,487..., soit 8 121 à l'unité près, ce qui confirme la question 4.b.

6) On cherche le plus petit entier n tel que $v_n > 2 000$:

$$400 \times 1,15^n > 2 000 \iff 1,15^n > 5 \iff n \ln(1,15) > \ln(5) \iff n > \frac{\ln(5)}{\ln(1,15)} \approx 11,52$$

(on peut diviser par $\ln(1,15) > 0$ sans changer le sens). Donc $n = 12$: le plafond serait dépassé en 2039. Contrôle : $v_{11} \approx 1 861$ et $v_{12} \approx 2 140$.

Exercice 3 : La forme d'un ballon d'eau chaude

5 points

1) $\pi r^2 h = 0,2$ donc $\boxed{h = \frac{0,2}{\pi r^2}}$. Alors

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{0,2}{\pi r^2} = \boxed{2\pi r^2 + \frac{0,4}{r}}.$$

2) $S'(r) = 4\pi r + 0,4 \times \left(-\frac{1}{r^2}\right) = 4\pi r - \frac{0,4}{r^2} = \boxed{\frac{4\pi r^3 - 0,4}{r^2}}$.

3) a. Comme $r^2 > 0$, $S'(r)$ a le signe de $4\pi r^3 - 0,4$, et $4\pi r^3 - 0,4 \geq 0 \iff r^3 \geq \frac{0,4}{4\pi} = \frac{0,1}{\pi}$. La fonction cube étant strictement croissante, $r^3 \geq r_0^3$ équivaut à $\boxed{r \geq r_0}$, puisque $r_0^3 = \frac{0,1}{\pi}$.

b. S' est négative sur $[0,1 ; r_0]$ et positive sur $[r_0 ; 1]$, avec $\boxed{r_0 \approx 0,317 \text{ m}}$, soit 31,7 cm.

r	0,1	r_0	1
$S'(r)$	-	0	+
S	$0,02\pi + 4$	$S(r_0)$	$2\pi + 0,4$

4) $S(r_0) \approx \boxed{1,89 \text{ m}^2}$. La hauteur correspondante est $h_0 = \frac{0,2}{\pi r_0^2} \approx \boxed{0,634 \text{ m}}$.

Comme $\pi r_0^3 = 0,1$, on a $h_0 = \frac{0,2 r_0}{\pi r_0^3} = \frac{0,2 r_0}{0,1} = 2r_0$: **la hauteur est égale au diamètre**. Le ballon de surface minimale est aussi haut que large.

5) $h = \frac{0,2}{\pi \times 0,25^2} \approx \boxed{1,02 \text{ m}}$ et $S(0,25) = 0,125\pi + 1,6 \approx 1,993 \text{ m}^2$.

$\frac{S(0,25) - S(r_0)}{S(r_0)} \approx 0,0525$: la surface, donc les pertes, augmentent d'environ $\boxed{5,3 \%}$.

Ce supplément est modéré, et la forme élancée a des avantages : moins d'encombrement au sol ou au mur (le ballon tient dans un placard), et l'eau chaude, plus légère, reste en haut du ballon, loin de l'eau froide qui entre par le bas.

Exercice 4 : La mise en chauffe d'un fer à souder

5 points

1) $T(0) = 350 - 330 = \boxed{20}$: à la mise en marche, la panne est à la température de la pièce, 20 °C.

2) $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,05t = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05t} = 0$ et $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 350}$. La température se stabilise vers 350 °C, la température de consigne de la station.

3) $T'(t) = -330 \times (-0,05) e^{-0,05t} = \boxed{16,5 e^{-0,05t}}$. Une exponentielle étant strictement positive, $T'(t) > 0$: T est **strictement croissante** sur $[0; +\infty[$.

4) $T(0) = 20$ et $T'(0) = 16,5$: la tangente a pour équation $y = T'(0)(t - 0) + T(0)$, soit $\boxed{y = 16,5t + 20}$.

$16,5t + 20 = 350 \iff t = \frac{330}{16,5} = \boxed{20 \text{ s}}$. (C'est la « constante de temps » du système : si la température continuait de monter à la vitesse initiale, la consigne serait atteinte en 20 s.)

5)

$$\begin{aligned} T(t) \geq 340 &\iff 330 e^{-0,05t} \leq 10 \iff e^{-0,05t} \leq \frac{1}{33} \\ &\iff -0,05t \leq -\ln(33) \iff t \geq 20 \ln(33). \end{aligned}$$

$20 \ln(33) \approx 69,93$: le fer est prêt au bout de $\boxed{70 \text{ s}}$ environ.

C'est plus d'une minute : à $t = 60$, $T(60) \approx 333,6 \text{ °C} < 340 \text{ °C}$. L'affirmation de la notice **n'est pas compatible** avec le modèle (sauf à considérer le fer prêt dès 333 °C environ).