



Calculatrice autorisée (mode examen)

Partie mathématiques de l'épreuve de spécialité, au format du bac STI2D, notée sur 20.

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Exercice 1 : Composées, logarithmes et ordres de grandeur

4 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$.

- Écrire f sous la forme $v \circ u$, en précisant les fonctions u et v .
- En déduire que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 4)^2}$, puis donner le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Question 2

- Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $2 \ln(x) + \ln(3) = \ln(48)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3e^{-0,2x} = 0,6$. On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Question 3

On considère la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = (2x + 1)e^{-x}$.

- Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0; +\infty[$ (on y fera figurer la valeur exacte du maximum).
- On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

Question 4

Le protocole Internet IPv6 permet d'attribuer 2^{128} adresses différentes. À l'aide du logarithme décimal, déterminer le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2^{128} .

Exercice 2 : Le plan de plantation d'arbres d'une métropole

6 points

Pour rafraîchir ses rues en été, une métropole compare deux programmes de plantation d'arbres, à partir de l'année 2027.

- Programme A** : 500 arbres plantés en 2027, puis chaque année 80 arbres de plus que l'année précédente.
- Programme B** : 400 arbres plantés en 2027, puis chaque année 15 % d'arbres de plus que l'année précédente.

Pour tout entier naturel n , on note u_n et v_n les nombres d'arbres plantés l'année $2027 + n$ selon le programme A et selon le programme B. Ainsi $u_0 = 500$ et $v_0 = 400$.

- Calculer u_1 , v_1 et v_2 .
- Préciser la nature de chacune des suites (u_n) et (v_n) , puis exprimer u_n et v_n en fonction de n .
- À l'aide de la calculatrice, déterminer la première année où le programme B fait planter plus d'arbres que le programme A dans l'année.



- 4) Le conseil métropolitain s'intéresse au nombre total d'arbres plantés pendant les dix années de 2027 à 2036.
- Calculer ce total pour le programme A.
 - Montrer que, pour le programme B, ce total vaut $400 \times \frac{1,15^{10} - 1}{0,15}$, puis en donner une valeur arrondie à l'unité.
- 5) On souhaite vérifier ce dernier résultat avec la fonction Python ci-dessous, dans laquelle une ligne est incomplète.

```
def total_B(n):
    s = 0
    v = 400
    for k in range(n):
        s = s + v
        v = .....
    return s
```

Recopier et compléter la ligne incomplète, puis indiquer la valeur renvoyée par `total_B(10)`, arrondie à l'unité.

- 6) Le programme B prévoit de plafonner les plantations à 2 000 arbres par an. Déterminer, par le calcul, la première année où ce plafond serait dépassé si l'on poursuivait la progression de 15 % par an.

Exercice 3 : La forme d'un ballon d'eau chaude

5 points

Un fabricant conçoit un ballon d'eau chaude de 200 litres, soit $0,2 \text{ m}^3$, en forme de cylindre de rayon r et de hauteur h , exprimés en mètres. Les pertes de chaleur sont proportionnelles à la surface totale S du cylindre (paroi latérale, fond et couvercle) : le bureau d'études cherche donc à rendre cette surface la plus petite possible.

On rappelle que le volume d'un cylindre est $\pi r^2 h$ et que sa surface totale est $2\pi r^2 + 2\pi r h$. On étudie $r \in [0,1 ; 1]$.

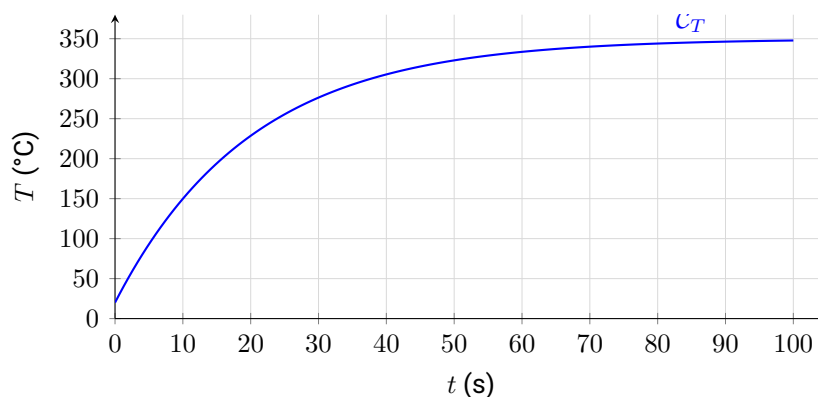
- Exprimer h en fonction de r , puis montrer que la surface totale, en m^2 , est $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{0,4}{r}$.
- Montrer que, pour tout $r \in [0,1 ; 1]$, $S'(r) = \frac{4\pi r^3 - 0,4}{r^2}$.
- On pose $r_0 = \left(\frac{0,1}{\pi}\right)^{1/3}$.
 - Justifier que $S'(r) \geq 0$ équivaut à $r^3 \geq \frac{0,1}{\pi}$, puis à $r \geq r_0$.
 - Dresser le tableau de variations de S sur $[0,1 ; 1]$. Donner une valeur approchée de r_0 au millimètre près.
- Calculer la surface minimale, arrondie à $0,01 \text{ m}^2$ près, puis la hauteur correspondante, arrondie au millimètre. Comparer cette hauteur au diamètre du ballon.
- Les ballons vendus dans le commerce sont plus élancés : un modèle courant a un rayon de 25 cm. Calculer sa hauteur, arrondie au centimètre, et le pourcentage de surface supplémentaire par rapport au minimum, arrondi à $0,1 \%$ près. Proposer une raison de ce choix.

Exercice 4 : La mise en chauffe d'un fer à souder**5 points**

Dans un laboratoire d'électronique, on met en marche une station de soudage. La température de la panne du fer, en degrés Celsius, est modélisée en fonction du temps t , en secondes, par la fonction T définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$T(t) = 350 - 330e^{-0,05t}.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_T$ est tracée ci-dessous.



- 1) Calculer $T(0)$ et interpréter ce résultat.
- 2) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t)$ et interpréter ce résultat.
- 3) Calculer $T'(t)$, puis en déduire le sens de variation de T sur $[0 ; +\infty[$.
- 4) Montrer que la tangente à la courbe de T au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 16,5t + 20$. Calculer l'instant où cette tangente atteint la valeur 350.
- 5) La notice de la station affirme : « *fer prêt à souder en moins d'une minute* ». On considère que le fer est prêt lorsque sa température atteint 340°C . Déterminer par le calcul l'instant, arrondi à la seconde, à partir duquel le fer est prêt. L'affirmation de la notice est-elle compatible avec le modèle ?