

Exercice 1 : Le laboratoire d'électronique (questions indépendantes) 5 points

- 1) a. $|Z| = \sqrt{30^2 + (30\sqrt{3})^2} = \sqrt{900 + 2700} = \sqrt{3600} = 60$. Un argument θ vérifie $\cos \theta = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{30\sqrt{3}}{60} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$: $Z = 60 e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- b. $I = \frac{230}{60 e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{23}{6} e^{-i\frac{\pi}{3}} \approx 3,83 e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (le module d'un quotient est le quotient des modules, l'argument est la différence des arguments). L'intensité a pour argument $-\frac{\pi}{3}$ et la tension 0 : l'intensité est **en retard de $\frac{\pi}{3}$ rad (60°)** sur la tension.

- 2) **Réponse C.** Avec $u(x) = x^2 + x$, on a $u'(x) = 2x + 1$: la fonction intégrée est de la forme $u' e^u$, qui a pour primitive e^u . Donc

$$\int_0^1 (2x + 1) e^{x^2+x} dx = \left[e^{x^2+x} \right]_0^1 = e^2 - e^0 = e^2 - 1.$$

- 3) On veut $\frac{5}{2^n} \leq 0,001 \iff 2^n \geq 5000 \iff n \ln 2 \geq \ln 5000 \iff n \geq \frac{\ln 5000}{\ln 2} \approx 12,29$ (car $\ln$ est croissante et $\ln 2 > 0$). Il faut $n = 13$ bits. Vérification : $\frac{5}{2^{12}} \approx 1,22$ mV et $\frac{5}{2^{13}} \approx 0,61$ mV.

- 4) Formule des probabilités totales (arbre : A puis D) : $P(D) = P(A) P_A(D) + P(\bar{A}) P_{\bar{A}}(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,032$.

$P_A(D) = 0,02 \neq P(D) = 0,032$: A et D ne sont pas indépendants (un composant de A a moins de chances d'être défectueux que la moyenne).

Exercice 2 : La découpe d'un écrou hexagonal (copie à corriger) 4 points

- 1) **L1 est correcte** : c'est la formule $|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$. **L4 est correcte dans sa méthode** : multiplier par $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ajoute $\frac{\pi}{3}$ à l'argument et conserve le module ; seul le point de départ (L3) est faux. **L5 est un calcul correct** de $4 e^{i\frac{2\pi}{3}}$: $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 2) **Erreur 1 (L2)** : $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{1}{2}$ correspondent à $\theta = \frac{\pi}{6}$, pas à $\frac{\pi}{3}$ (pour $\frac{\pi}{3}$, c'est le cosinus qui vaut $\frac{1}{2}$). L'erreur se propage à L3, L4 et L5.

Erreur 2 (L6) : le module d'une différence n'est pas la différence des modules : $|b-a| \neq |b|-|a|$ en général. Ici $|b|-|a| = 0$ alors que $A \neq B$. Il faut calculer $b-a$ puis son module.

- 3) $a = 4 e^{i\frac{\pi}{6}}$, puis $b = 4 e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})} = 4 e^{i\frac{\pi}{2}} = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 4i$.

- 4) $b-a = 4i - 2\sqrt{3} - 2i = -2\sqrt{3} + 2i$, donc $AB = |b-a| = \sqrt{12+4} = 4$ cm.

On pouvait le prévoir : $OA = OB = 4$ (une rotation conserve les distances) et $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. Le triangle OAB est isocèle en O avec un angle au sommet de 60° : il est équilatéral, et le côté de l'hexagone est égal à son rayon.

Exercice 3 : Les ventouses d'un robot de manutention (Python)

4 points

- On répète 6 fois, de façon indépendante, la même épreuve de Bernoulli : « la ventouse fuit » (succès, de probabilité p) ou non. X compte les succès : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(6; p)$.
- `coef` contient les coefficients binomiaux $\binom{6}{k}$, pour k de 0 à 6 : c'est la ligne $n = 6$ du triangle de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Par la formule de Pascal, $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$: c'est le nombre de chemins de l'arbre qui comportent exactement deux ventouses qui fuient.

- $P(X = 0) = 0,9^6 \approx 0,531$; $P(X = 1) = 6 \times 0,1 \times 0,9^5 \approx 0,354$; $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,531 441 - 0,354 294 \approx 0,114$.
- La fonction calcule $\sum_{k=0}^6 k \times P(X = k)$: c'est l'espérance $E(X)$. Le premier résultat vaut 0,6 (le dernier chiffre affiché vient de l'arrondi des calculs de la machine) : **en moyenne, 0,6 ventouse par robot fuit chaque mois.**
On pouvait le prévoir : l'espérance d'une loi $\mathcal{B}(n; p)$ est np , et $6 \times 0,1 = 0,6$, $6 \times 0,25 = 1,5$.
- Par robot : $45 \times E(X) = 45 \times 0,6 = 27$ € en moyenne. Pour 5 robots : **135 € par mois** en moyenne.

Exercice 4 : La centrifugeuse d'un laboratoire d'analyses

7 points

Partie A – La mise en vitesse

- Une fonction constante $y = k$ a une dérivée nulle : $0 = -0,2k + 1 200 \iff k = \frac{1 200}{0,2} = 6 000$.
C'est la **vitesse de régime** : la vitesse vers laquelle tend la centrifugeuse.
- Les solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont les fonctions $t \mapsto K e^{at} - \frac{b}{a}$.
Ici, avec $a = -0,2$ et $b = 1 200$: $y(t) = K e^{-0,2t} + 6 000$, $K \in \mathbb{R}$. $N(0) = 0 \iff K + 6 000 = 0 \iff K = -6 000$, d'où $N(t) = 6 000 - 6 000 e^{-0,2t}$.
- $N'(t) = -6 000 \times (-0,2) e^{-0,2t} = 1 200 e^{-0,2t} > 0$: N est **strictement croissante**. Comme $e^{-0,2t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 6 000$ tr/min.

Partie B – Les trente premières secondes

- $N(t) \geq 5 800 \iff 6 000 e^{-0,2t} \leq 200 \iff e^{-0,2t} \leq \frac{1}{30} \iff -0,2t \leq -\ln 30 \iff t \geq 5 \ln 30 \approx 17,006$.

Le chronomètre démarre au bout d'environ $\boxed{17,0 \text{ s}}$.

- 5) Une primitive de N est $G(t) = 6\,000t + 30\,000e^{-0,2t}$ (car $\frac{-6\,000}{-0,2} = 30\,000$). La vitesse moyenne sur $[0; 30]$ est

$$m = \frac{1}{30} \int_0^{30} N(t) dt = \frac{G(30) - G(0)}{30} = \frac{180\,000 + 30\,000e^{-6} - 30\,000}{30},$$

soit $m = 5\,000 + 1\,000e^{-6} \approx \boxed{5\,002 \text{ tr/min}}$. En 30 secondes, soit une demi-minute, la centrifugeuse effectue environ $5\,002 \times 0,5 \approx \boxed{2\,501 \text{ tours}}$.

Partie C – Le freinage

- 6) $F'(s) = 6\,000 \times (-0,5)e^{-0,5s} = -0,5 \times 6\,000e^{-0,5s} = -0,5F(s)$, et $F(0) = 6\,000e^0 = 6\,000$. Donc F est la solution de $\boxed{y' = -0,5y}$ qui vaut 6 000 en 0 (elle est unique).

- 7) $F(s) < 60 \iff e^{-0,5s} < 0,01 \iff -0,5s < \ln 0,01 \iff s > 2 \ln 100 \approx 9,21$.

Le couvercle se déverrouille au bout d'environ $\boxed{9,2 \text{ s}}$: l'annonce de la notice (« moins de 10 secondes ») est **exacte**.