

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Le laboratoire d'électronique (questions indépendantes) 5 points

Les quatre questions sont indépendantes.

- Un dipôle alimenté en régime sinusoïdal a pour impédance complexe, en ohms, $Z = 30 + 30\sqrt{3}i$.
 - Écrire Z sous forme exponentielle.
 - On l'alimente sous une tension dont la valeur complexe est $U = 230$. On admet que l'intensité complexe est $I = \frac{U}{Z}$. Écrire I sous forme exponentielle (module arrondi au centième) et en déduire le déphasage entre l'intensité et la tension.
- Indiquer la lettre de la réponse exacte, en expliquant votre choix.
L'intégrale $\int_0^1 (2x + 1) e^{x^2+x} dx$ est égale à :

A. e^2 B. $\frac{e^2 - 1}{2}$ C. $e^2 - 1$ D. $2e^2 - 2$
- Un convertisseur analogique-numérique code une tension comprise entre 0 et 5 V sur n bits : il découpe cette plage en 2^n niveaux, et sa résolution est donc $\frac{5}{2^n}$ volts. Déterminer par le calcul le plus petit nombre de bits n pour lequel la résolution est inférieure ou égale à 1 mV.
- Le stock de composants du laboratoire provient pour 60 % du fournisseur A et pour 40 % du fournisseur B. 2 % des composants de A et 5 % des composants de B sont défectueux. On prélève un composant au hasard ; on note A l'événement « il provient du fournisseur A » et D l'événement « il est défectueux ». Calculer $P(D)$. Les événements A et D sont-ils indépendants ?

Exercice 2 : La découpe d'un écrou hexagonal (copie à corriger) 4 points

Une découpeuse laser trace un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O . Dans un repère orthonormé direct d'origine O (unité : le centimètre), le sommet A a pour affixe $a = 2\sqrt{3} + 2i$. Chaque sommet s'obtient à partir du précédent par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$: l'affixe de B est donc $b = a e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Un élève doit écrire a sous forme exponentielle, en déduire b , puis calculer la longueur AB du côté de l'écrou. Voici sa copie, dont les lignes sont numérotées.

L1	$ a = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = 4.$
L2	$\cos \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}.$
L3	Donc $a = 4 e^{i\frac{\pi}{3}}.$
L4	$b = a e^{i\frac{\pi}{3}} = 4 e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})} = 4 e^{i\frac{2\pi}{3}}.$
L5	$b = 4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -2 + 2\sqrt{3}i.$
L6	$AB = b - a = b - a = 4 - 4 = 0.$ C'est bizarre, je me suis trompé quelque part.

- Les lignes L1, L4 et L5 sont-elles correctes ? Justifier brièvement.

- 2) Identifier les deux erreurs de la copie et expliquer chacune d'elles.
- 3) Donner la forme exponentielle correcte de a , puis celle de b et sa forme algébrique.
- 4) Calculer la longueur AB . Pouvaient-on prévoir ce résultat sans calcul ?

Exercice 3 : Les ventouses d'un robot de manutention (Python)

4 points

Un robot de palettisation saisit les cartons à l'aide de 6 ventouses. Lors du contrôle mensuel, chaque ventouse présente une fuite d'air avec la probabilité p , indépendamment des autres. On note X le nombre de ventouses qui fuient sur le robot. On considère le programme Python suivant.

```
coef = [1, 6, 15, 20, 15, 6, 1]

def proba(k, p):
    return coef[k] * p**k * (1 - p)**(6 - k)

def esperance(p):
    E = 0
    for k in range(7):
        E = E + k * proba(k, p)
    return E
```

- 1) Justifier que X suit une loi binomiale, dont on précisera les paramètres.
- 2) Que contient la liste `coef` ? Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 6$ pour justifier la valeur de `coef[2]`.
- 3) Dans cette question, $p = 0,1$. Calculer, à 10^{-3} près, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, puis la probabilité qu'au moins deux ventouses du robot fuient.
- 4) Voici ce qu'affiche la console :

```
>>> print(esperance(0.1))      >>> print(esperance(0.25))
0.6000000000000001           1.5
```

Que calcule la fonction `esperance` ? Interpréter le premier résultat et expliquer pourquoi on pouvait prévoir ces deux valeurs.

- 5) Une ventouse qui fuit est remplacée, pour 45 €. Avec $p = 0,1$, quel budget moyen faut-il prévoir chaque mois pour un atelier équipé de 5 robots identiques ?

Exercice 4 : La centrifugeuse d'un laboratoire d'analyses

7 points

Une centrifugeuse fait tourner des tubes d'échantillons sanguins pour en séparer les constituants. On note $N(t)$ sa vitesse de rotation, en tours par minute (tr/min), t secondes après la mise en marche. On admet que la fonction N est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,2y + 1200,$$

et que la centrifugeuse est à l'arrêt au départ : $N(0) = 0$.

Partie A – La mise en vitesse

- 1) Déterminer la fonction constante solution de (E) . Que représente-t-elle pour la centrifugeuse ?

- 2) Résoudre l'équation différentielle (E) , puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $N(t) = 6\,000 - 6\,000 e^{-0,2t}$.
- 3) Étudier le sens de variation de N sur $[0; +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.

Partie B – Les trente premières secondes

- 4) Le programme d'analyse ne démarre le chronomètre que lorsque la vitesse atteint 5 800 tr/min. Déterminer par le calcul au bout de combien de temps, *arrondi au dixième de seconde*.
- 5) Calculer la vitesse moyenne de la centrifugeuse sur les 30 premières secondes, *arrondie à l'unité*. En déduire le nombre de tours effectués pendant ces 30 secondes.

Partie C – Le freinage

À la fin du cycle, la centrifugeuse tourne à 6 000 tr/min et un frein électrique est enclenché. On admet que, s secondes après le début du freinage, sa vitesse est $F(s) = 6\,000 e^{-0,5s}$.

- 6) Vérifier que F est la solution de l'équation différentielle $y' = -0,5y$ qui vaut 6 000 en $s = 0$.
- 7) Par sécurité, le couvercle ne se déverrouille que lorsque la vitesse est inférieure à 60 tr/min. La notice annonce une ouverture possible « moins de 10 secondes après le début du freinage ». Est-ce exact ? Déterminer le délai, *arrondi au dixième de seconde*.