

Exercice 1 : Du premier trimestre à l'exponentielle (vrai ou faux)

4 points

- Fausse.** $u_n = 3 \times 2 \times 2^n = 6 \times 2^n$, donc $u_{n+1} = 2u_n$: la suite est géométrique de raison $\boxed{2}$ et de premier terme $u_0 = 6$. Contre-exemple direct : $u_0 = 6$ et $u_1 = 12$, et $\frac{u_1}{u_0} = 2 \neq 3$.
- Vraie.** $e^{2x+1} = 5 \iff 2x+1 = \ln 5 \iff \boxed{x = \frac{\ln 5 - 1}{2}}$ (car $e^X = 5 \iff X = \ln 5$). La solution existe et elle est unique.
- Fausse.** $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$, qui est positive sur $[2; 3]$: f est croissante sur $[2; 3]$. Contre-exemple : $f(2) = 4$ et $f(3) = 3 + \frac{4}{3} \approx 4,33 > f(2)$.
- Vraie.** $h = e^u$ avec $u(x) = -x^2$, $u'(x) = -2x$, donc $h'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \boxed{-2xe^{-x^2}}$. Comme $e^{-x^2} > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-2x$: positive sur $]-\infty; 0]$, négative sur $[0; +\infty[$. La fonction h croît puis décroît : elle admet un maximum en 0, égal à $h(0) = e^0 = 1$.

Exercice 2 : La sonde d'un plancher chauffant (deux documents)

5 points

- Valeurs de $\ln(R_i)$ arrondies au millièmè :

x_i	3,661	3,532	3,411	3,299	3,193	3,095	3,002
$y_i = \ln(R_i)$	3,353	2,918	2,493	2,117	1,747	1,416	1,089

- La calculatrice (régression linéaire) donne $\boxed{y = 3,435x - 9,218}$.

- D'après le document 2, avec les propriétés du logarithme ($\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln(e^X) = X$) :

$$\ln R = \ln 10 + B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{298,15} \right) = \frac{B}{1000} \times \frac{1000}{T} + \ln 10 - \frac{B}{298,15} = \frac{B}{1000} x + c,$$

avec $c = \ln 10 - \frac{B}{298,15}$ constante. Le coefficient directeur de la droite d'ajustement estime donc $\frac{B}{1000} : \frac{B}{1000} \approx 3,435$, soit $\boxed{B \approx 3\,435\text{ K}}$.

- À 50°C , $T = 323,15\text{ K}$ et le document 2 prévoit $R = 10e^{3950\left(\frac{1}{323,15} - \frac{1}{298,15}\right)} \approx \boxed{3,59\text{ k}\Omega}$, alors qu'on a mesuré $4,12\text{ k}\Omega$: un écart de plus de $0,5\text{ k}\Omega$, soit environ 15 %. Les deux documents **ne sont pas compatibles** : la sonde installée n'a pas le coefficient $B = 3\,950\text{ K}$ de la notice, mais $B \approx 3\,435\text{ K}$. (Sa résistance à 25°C reste voisine de $10\text{ k}\Omega$: avec l'ajustement, $e^{3,435 \times 1000 / 298,15 - 9,218} \approx 10,0$.)

- $10e^{3950u} = 4,12 \iff e^{3950u} = 0,412 \iff 3950u = \ln(0,412) \iff u = \frac{\ln(0,412)}{3950} \approx -2,245 \times 10^{-4}$.

Alors $\frac{1}{T} = \frac{1}{298,15} + u \approx 3,1295 \times 10^{-3}$, d'où $T \approx 319,54\text{ K}$ et $\theta = T - 273,15 \approx \boxed{46,4^\circ\text{C}}$.

L'eau est à 50°C mais le régulateur affiche $46,4^\circ\text{C}$: il sous-estime la température de $3,6^\circ\text{C}$ environ et continuera de chauffer, au risque de surchauffer le plancher. Conseil : **reprogrammer le régulateur avec $B = 3\,435\text{ K}$** , ou remplacer la sonde par la référence de la notice.

Exercice 3 : Les lampes UV-C d'une station d'eau (question ouverte) 3 points

Durée de vie du modèle A. On cherche quand l'intensité passe sous 70 % :

$$100 e^{-0,00008t} < 70 \iff e^{-0,00008t} < 0,7 \iff -0,00008t < \ln 0,7 \iff t > \frac{\ln 0,7}{-0,00008} \approx 4\,458 \text{ h}$$

(on divise par un nombre négatif : l'inégalité change de sens).

Durée de vie du modèle B. On écrit $I_B(t) = 100 e^{-kt}$ avec $k > 0$. L'intensité est divisée par deux en 12 000 h : $e^{-12\,000k} = 0,5$, donc $k = \frac{\ln 2}{12\,000} \approx 5,78 \times 10^{-5}$. Comme pour A, $t > \frac{\ln 0,7}{-k} \approx 6\,175 \text{ h}$.

Comparaison. Le modèle B dure bien plus longtemps (environ 39 % de plus), mais il coûte 56 % plus cher. Ramené à l'heure de fonctionnement :

$$A : \frac{90}{4\,458} \approx 0,0202 \text{ €/h} \quad B : \frac{140}{6\,175} \approx 0,0227 \text{ €/h}.$$

Le modèle A revient moins cher (environ 20,2 € contre 22,7 € pour 1 000 heures) : l'affirmation du responsable est fausse. Durer plus longtemps ne suffit pas : il faut comparer le coût par heure de service.

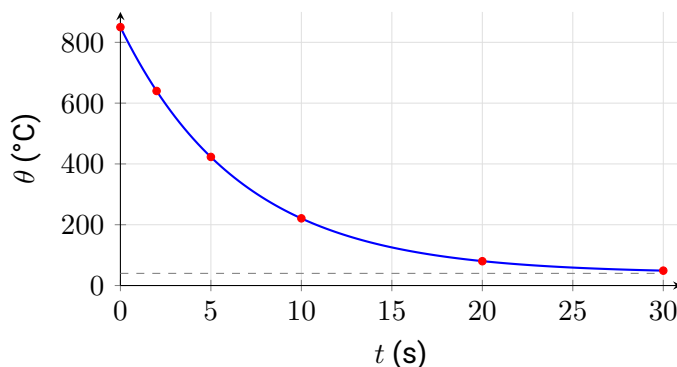
Exercice 4 : La trempe d'un arbre de transmission

8 points

Partie A — Le refroidissement

- $\theta(0) = 40 + 810 e^0 = 850$: au moment de l'immersion, l'arbre est à 850 °C, sa température de chauffe.
- $\theta = 40 + 810 e^u$ avec $u(t) = -0,15t$, donc $\theta'(t) = 810 \times (-0,15) e^{-0,15t} = -121,5 e^{-0,15t}$. Une exponentielle est strictement positive, donc $\theta'(t) < 0$: θ est **strictement décroissante** sur $[0; +\infty[$.
- Quand $t \rightarrow +\infty$, $-0,15t \rightarrow -\infty$ et $e^{-0,15t} \rightarrow 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 40$: la température de l'arbre se rapproche de celle du bain d'huile.
- Valeurs arrondies à l'unité, puis allure de la courbe (les points du tableau sont en rouge, la droite en pointillés est la température du bain) :

t (s)	0	2	5	10	20	30
$\theta(t)$ (°C)	850	640	423	221	80	49



$$5) \theta(t) < 200 \iff 810 e^{-0,15t} < 160 \iff e^{-0,15t} < \frac{16}{81} \iff -0,15t < \ln\left(\frac{16}{81}\right) \iff t > \frac{\ln(81/16)}{0,15} \approx 10,81.$$

L'arbre peut être sorti au bout d'environ $\boxed{10,8 \text{ s}}$ (dès que t dépasse 10,81 s).

Partie B – La vitesse de refroidissement

$$6) -0,15 (\theta(t) - 40) = -0,15 \times 810 e^{-0,15t} = -121,5 e^{-0,15t} = \theta'(t). \quad \boxed{\theta'(t) = -0,15 (\theta(t) - 40)}$$

$$7) \theta(t) = 550 \iff 810 e^{-0,15t} = 510 \iff e^{-0,15t} = \frac{17}{27} \iff t = \frac{\ln(27/17)}{0,15} \approx \boxed{3,08 \text{ s}}.$$

À cet instant, d'après la question 6, $\theta'(t) = -0,15 \times (550 - 40) = -76,5$: l'acier perd 76,5 °C par seconde, ce qui est supérieur à 55 °C par seconde. **La trempe est réussie.**

Partie C – Le vieillissement de l'huile

8) Diminuer de 2 % revient à multiplier par 0,98 : $k_{n+1} = 0,98 k_n$. La suite (k_n) est géométrique de raison 0,98, de premier terme $k_0 = 0,15$: $\boxed{k_n = 0,15 \times 0,98^n}$.

9) $\theta'_n(t) = -810 k_n e^{-k_n t} = -k_n (\theta_n(t) - 40)$. Au moment où $\theta_n(t) = 550$: $\theta'_n(t) = -k_n \times 510$. L'acier se refroidit donc de $\boxed{510 k_n}$ degrés par seconde.

10) La trempe reste réussie tant que $510 k_n \geq 55$, c'est-à-dire

$$76,5 \times 0,98^n \geq 55 \iff 0,98^n \geq \frac{55}{76,5} \iff n \ln 0,98 \geq \ln\left(\frac{55}{76,5}\right) \iff n \leq \frac{\ln(55/76,5)}{\ln 0,98} \approx 16,3$$

(on divise par $\ln 0,98 < 0$: l'inégalité change de sens). La trempe est réussie jusqu'au lot $n = 16$ ($510 k_{16} \approx 55,4$) et ne l'est plus au lot 17 ($510 k_{17} \approx 54,3$) : il faut $\boxed{\text{changer l'huile après 16 lots}}$, soit 1 600 pièces.

11) $k_{16} = 0,15 \times 0,98^{16} \approx 0,1086$. Comme à la question 5, $\theta_{16}(t) < 200 \iff t > \frac{\ln(81/16)}{k_{16}} \approx \boxed{14,9 \text{ s}}$, contre 10,8 s avec l'huile neuve : environ 4 secondes de plus par pièce, soit près de 40 % de temps en plus dans le bain.