

Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 : Du premier trimestre à l'exponentielle (vrai ou faux)

4 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. **Toute réponse doit être justifiée** : un calcul, une propriété du cours ou un contre-exemple.

- 1) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 2^{n+1}$ est une suite géométrique de raison 3.
- 2) L'équation $e^{2x+1} = 5$ a pour unique solution le réel $x = \frac{\ln 5 - 1}{2}$.
- 3) La fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[1; 3]$.
- 4) La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{-x^2}$ admet un maximum, égal à 1, atteint en $x = 0$.

Exercice 2 : La sonde d'un plancher chauffant (deux documents)

5 points

La régulation d'un plancher chauffant mesure la température de l'eau à l'aide d'une thermistance : un composant dont la résistance R diminue quand la température augmente. Un technicien a relevé au banc d'essai la résistance de la sonde installée (document 1). Le régulateur, lui, a été programmé avec les données du fabricant (document 2).

Document 1 – Mesures au banc. θ est la température en degrés Celsius, $T = \theta + 273,15$ la température en kelvins, et $x = \frac{1\,000}{T}$ (arrondi au millième).

θ (°C)	0	10	20	30	40	50	60
$x_i = \frac{1\,000}{T}$	3,661	3,532	3,411	3,299	3,193	3,095	3,002
R_i (kΩ)	28,6	18,5	12,1	8,31	5,74	4,12	2,97
$y_i = \ln(R_i)$							

Document 2 – Extrait de la notice de la sonde. « Thermistance 10 kΩ à 25 °C, coefficient $B = 3\,950$ K. La résistance, en kΩ, est donnée en fonction de la température T en kelvins par

$$R = 10 e^{Bu} \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{T} - \frac{1}{298,15}.$$

- 1) Recopier et compléter la dernière ligne du document 1, en arrondissant au millième.
- 2) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, coefficients arrondis au millième.
- 3) Montrer qu'avec le modèle du document 2, on a $\ln R = \frac{B}{1\,000} x + c$, où c est une constante. En déduire, d'après les mesures, une estimation du coefficient B de la sonde installée.
- 4) Calculer, avec le modèle du document 2, la résistance prévue à 50 °C, arrondie au centième, et la comparer à la mesure. Les deux documents sont-ils compatibles ?

- 5) La sonde est dans une eau à 50 °C : elle présente la résistance mesurée au banc. Résoudre l'équation $10e^{3950u} = 4,12$ d'inconnue u , en déduire T , puis donner la température, en degrés Celsius et *arrondie au dixième*, qu'affiche le régulateur. Que conseiller au technicien ?

Exercice 3 : Les lampes UV-C d'une station d'eau (question ouverte) 3 points

Aucune sous-question n'est posée : la démarche, les calculs et la rédaction sont évalués. Toute piste, même non aboutie, sera prise en compte.

Une station de potabilisation désinfecte l'eau par rayonnement ultraviolet. Une lampe doit être remplacée dès que son intensité tombe sous 70 % de son intensité initiale. Deux modèles sont proposés, qui fonctionnent en continu.

- **Modèle A**, 90 € : après t heures de fonctionnement, son intensité, en pourcentage de l'intensité initiale, est $I_A(t) = 100e^{-0,00008t}$.
- **Modèle B**, 140 € : son intensité décroît aussi de façon exponentielle, et le fabricant indique qu'elle est divisée par deux au bout de 12 000 heures.

Le responsable de la station affirme que « le modèle B, qui dure plus longtemps, revient moins cher ». Qu'en pensez-vous ?

Exercice 4 : La trempe d'un arbre de transmission

8 points

Pour durcir un arbre de transmission en acier, on le chauffe à 850 °C puis on le plonge dans un bain d'huile maintenu à 40 °C : c'est la *trempe*. La température de l'arbre, en degrés Celsius, t secondes après l'immersion, est modélisée par

$$\theta(t) = 40 + 810e^{-0,15t}, \quad t \geq 0.$$

Partie A – Le refroidissement

- 1) Calculer $\theta(0)$ et interpréter le résultat.
- 2) Calculer $\theta'(t)$ et en déduire le sens de variation de θ sur $[0; +\infty[$.
- 3) Déterminer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Interpréter.
- 4) Recopier et compléter le tableau suivant, *valeurs arrondies à l'unité*, puis tracer l'allure de la courbe représentative de θ sur $[0; 30]$.

t (s)	0	2	5	10	20	30
$\theta(t)$ (°C)						

- 5) L'arbre peut être sorti du bain dès que sa température est inférieure à 200 °C. Déterminer par le calcul au bout de combien de temps, *arrondi au dixième de seconde*.

Partie B – La vitesse de refroidissement

- 6) Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $\theta'(t) = -0,15(\theta(t) - 40)$.

- 7) La trempe n'est réussie que si l'acier se refroidit d'au moins 55°C par seconde au moment où il passe à 550°C . Déterminer l'instant où la température vaut 550°C , *arrondi au centième de seconde*, puis vérifier que la trempe est réussie.

Partie C – Le vieillissement de l'huile

À l'usage, l'huile perd de son efficacité. On admet qu'après n lots de cent pièces trempées, la température d'un arbre est modélisée par $\theta_n(t) = 40 + 810 e^{-k_n t}$, où le coefficient k_n diminue de 2% à chaque lot, avec $k_0 = 0,15$.

- 8) Justifier que la suite (k_n) est géométrique et exprimer k_n en fonction de n .
- 9) En raisonnant comme à la question 6, montrer qu'après n lots, l'acier se refroidit de $510 k_n$ degrés par seconde au moment où il passe à 550°C .
- 10) Déterminer par le calcul après combien de lots il faut changer l'huile pour que la trempe reste réussie.
- 11) Avec l'huile du dernier lot réussi, combien de temps faut-il attendre avant de sortir l'arbre du bain (température inférieure à 200°C) ? *Arrondir au dixième de seconde* et comparer au résultat de la question 5.