

Exercice 1 : Automatismes, huit questions flash

4 points

Un demi-point par réponse exacte.

- 1) Proportion d'une proportion : $0,40 \times 0,25 = 0,10$, soit $\boxed{10\%}$ des élèves du lycée.
- 2) Coefficient multiplicateur global : $1,25 \times 0,80 = 1$. Le taux d'évolution global est $\boxed{0\%}$: le prix revient exactement à sa valeur de départ.
- 3) Coefficient réciproque : $\frac{1}{1,6} = 0,625 = 1 - 0,375$. Il faut une baisse de $\boxed{37,5\%}$.
- 4) $\frac{3,2}{8} \times 10^{-4-2} = 0,4 \times 10^{-6} = \boxed{4 \times 10^{-7}}$.
- 5) $P = \frac{U^2}{R} \iff PR = U^2 \iff \boxed{R = \frac{U^2}{P}} \quad (P \neq 0)$.
- 6) $9x^2 - \frac{16}{25} = (3x)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \boxed{\left(3x - \frac{4}{5}\right)\left(3x + \frac{4}{5}\right)}$.
- 7) Les racines sont -2 et 4 , et le coefficient -3 est négatif (parabole tournée vers le bas) : l'expression est $\boxed{\text{positive sur }] - 2 ; 4[, \text{ négative sur }] - \infty ; - 2[\text{ et sur }] 4 ; +\infty[, \text{ et nulle en } - 2 \text{ et en } 4}$.
- 8) Perdre 3% revient à multiplier par $0,97$ chaque jour : $V_{n+1} = 0,97 V_n$. La suite (V_n) est géométrique, de raison $\boxed{0,97}$.

Exercice 2 : Le local technique d'une piscine (QCM)

4 points

- 1) **Réponse B.** La fréquentation du jour n est le terme d'une suite arithmétique de premier terme 220 et de raison 12 : $u_n = 220 + 12(n - 1)$. $u_n > 500 \iff 12(n - 1) > 280 \iff n - 1 > 23,3 \dots$, donc $n \geq 25$. Vérification : $u_{24} = 496$ et $u_{25} = 508$. C'est le jour $\boxed{25}$. *A oublie que $u_{24} = 496$ ne dépasse pas 500; D divise 500 par 12.*
- 2) **Réponse D.** Une hausse de 5% par an multiplie la facture par $1,05$ chaque année; de 2025 à 2032 il y a 7 ans : $18\,000 \times 1,05^7 \approx \boxed{25\,328 \text{ €}}$. *A ajoute $7 \times 900 \text{ €}$ (modèle arithmétique), B et C se trompent sur l'exposant (6 et 8).*
- 3) **Réponse C.** Pour $x > 0$: $c(x) \leq 4 \iff \frac{840}{x} \leq 0,5 \iff 840 \leq 0,5x \iff \boxed{x \geq 1\,680}$ (on multiplie par $x > 0$, l'inégalité est conservée). *A oublie la partie fixe 3,5; B renverse l'inégalité.*
- 4) **Réponse A.** $P = 1,5u^3$ avec $u(t) = 1 + 0,5t$ et $u'(t) = 0,5$. La dérivée de u^3 est $3u^2u'$, donc $P'(t) = 1,5 \times 3 \times 0,5(1 + 0,5t)^2 = \boxed{2,25(1 + 0,5t)^2}$. *C oublie le facteur $u'(t) = 0,5$; B oublie l'exposant 3; D ne baisse pas l'exposant.*

Exercice 3 : Le tassement d'un remblai ferroviaire (Python)

5 points

- 1) $u_2 = 0,8 \times 12 = 9,6$ et $u_3 = 0,8 \times 9,6 = 7,68$. Chaque mois, le tassement est multiplié par $0,8$: $u_{n+1} = 0,8 u_n$. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $0,8$ et de premier terme $u_1 = 12$, d'où, pour tout $n \geq 1$, $\boxed{u_n = 12 \times 0,8^{n-1}}$.
- 2) a. Contenu des variables à la fin de chaque passage :

fin du passage	1	2	3
s	12	21,6	29,28
u	9,6	7,68	6,144

tassement (3) renvoie $29,28$ (Python affiche 29.28).

- b. s est un *accumulateur* : à chaque passage on lui ajoute le tassement du mois, puis u devient le tassement du mois suivant. tassement (n) renvoie le **tassement total** du remblai au bout

de n mois :
$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

- 3) Somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 0,8 \neq 1$:

$$S_n = u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 12 \times \frac{1 - 0,8^n}{0,2} = 60(1 - 0,8^n).$$

Comme $0,8^n > 0$, on a $1 - 0,8^n < 1$, donc $S_n < 60$: le tassement total reste toujours inférieur à 60 mm.

- 4) a. La fonction complétée :

```
def mois_de_pose():
    u = 12
    for n in range(1, 61):
        if u < 1:
            return n
    u = 0.8 * u
```

Au début du passage numéro n, la variable u contient bien u_n (au premier passage, $u = 12 = u_1$).

- b. On cherche le premier n tel que $12 \times 0,8^{n-1} < 1$. Le tableau de valeurs de la calculatrice donne $u_{12} = 12 \times 0,8^{11} \approx 1,03$ et $u_{13} = 12 \times 0,8^{12} \approx 0,82$. La fonction renvoie 13 : on pose les rails après le 13^e mois.

- c. $S_{13} = 60(1 - 0,8^{13}) \approx 56,7 \text{ mm}$, soit $\frac{56,70}{60} \approx 94,5\%$ du tassement maximal.

Exercice 4 : Les livraisons de granulés d'une chaufferie collective

7 points

Partie A – Combien livrer à chaque fois ?

- 1) Il faut apporter 240 tonnes par an, par lots de Q tonnes : il faut $\frac{240}{Q}$ livraisons. Coût des livraisons :

$$250 \times \frac{240}{Q} = \frac{60\,000}{Q}. \text{ Coût du stock : } 15 \times \frac{Q}{2} = 7,5 Q. \text{ Au total, } C(Q) = \frac{60\,000}{Q} + 7,5 Q.$$

- 2) La dérivée de $\frac{1}{Q}$ est $-\frac{1}{Q^2}$, donc

$$C'(Q) = -\frac{60\,000}{Q^2} + 7,5 = \frac{7,5 Q^2 - 60\,000}{Q^2} = \frac{7,5 (Q^2 - 8\,000)}{Q^2}.$$

Sur $[10; 60]$, $Q^2 > 0$ et $Q^2 \leq 3\,600 < 8\,000$, donc $Q^2 - 8\,000 < 0$: $C'(Q) < 0$ et C est strictement décroissante sur $[10; 60]$.

- 3) C étant décroissante, son minimum sur $[10; 60]$ est atteint en $Q = 60$: il faut **remplir le silo** à chaque livraison. Cela fait $\frac{240}{60} = \boxed{4 \text{ livraisons par an}}$, pour un coût $C(60) = 1\,000 + 450 = \boxed{1\,450 \text{ €}}$.
- 4) $Q = \sqrt{8\,000} \approx 89,4$ tonnes et $C(\sqrt{8\,000}) = \frac{60\,000}{\sqrt{8\,000}} + 7,5\sqrt{8\,000} \approx \boxed{1\,342 \text{ €}}$. L'économie annuelle est d'environ $1\,450 - 1\,342 = 108 \text{ €}$, soit environ $2\,170 \text{ €}$ en 20 ans : c'est **bien moins que les 6 000 € de travaux**. L'agrandissement ne serait pas remboursé en 20 ans (il faudrait environ $\frac{6\,000}{108} \approx 55$ ans).

Partie B – La puissance appelée un jour de grand froid

- 5) $P = 150 + 50 \cos(u)$ avec $u(t) = \frac{\pi(t-4)}{12} = \frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{3}$, donc $u'(t) = \frac{\pi}{12}$. La dérivée de $\cos(u)$ est $-u' \sin(u)$:
- $$P'(t) = -50 \times \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi(t-4)}{12}\right) = \boxed{-\frac{25\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi(t-4)}{12}\right)}.$$
- 6) Si $4 \leq t \leq 16$, alors $0 \leq \frac{\pi(t-4)}{12} \leq \pi$, et le sinus d'un angle de $[0; \pi]$ est positif ou nul. Donc $P'(t) \leq 0$ (nul seulement en 4 et en 16) : P est décroissante sur $[4; 16]$. Maximum : $P(4) = 150 + 50 \cos 0 = \boxed{200 \text{ kW à 4 h}}$; minimum : $P(16) = 150 + 50 \cos \pi = \boxed{100 \text{ kW à 16 h}}$.
- 7) $P'(10) = -\frac{25\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{25\pi}{6} \approx \boxed{-13,1}$. À 10 h, la puissance demandée diminue à la vitesse d'environ $13,1 \text{ kW}$ par heure.

Partie C – L'effet d'un programme d'isolation

- 8) La consommation baisse de 6 tonnes par an : (c_n) est arithmétique de raison -6 , et $\boxed{c_n = 240 - 6n}$. $c_n < 200 \iff 6n > 40 \iff n > 6,66\dots$, donc $n = 7$ ($c_6 = 204$, $c_7 = 198$) : la consommation passe sous 200 tonnes en $\boxed{2033}$.
- 9) Les années 2027 à 2036 correspondent à $n = 1$ à $n = 10$, soit 10 termes :

$$c_1 + c_2 + \dots + c_{10} = 10 \times \frac{c_1 + c_{10}}{2} = 10 \times \frac{234 + 180}{2} = \boxed{2\,070 \text{ tonnes}}.$$

Sans le programme : $10 \times 240 = 2\,400$ tonnes. Le programme économise $\boxed{330 \text{ tonnes}}$ sur dix ans.

- 10) En 2036, $c_{10} = 180$ tonnes, livrées par lots de 60 tonnes : $\frac{180}{60} = 3$ livraisons. Coût : $250 \times 3 + 7,5 \times 60 = 750 + 450 = \boxed{1\,200 \text{ €}}$.